Università di Roma Tre

Geometria per il TFA
tecniche di conteggio

Francesca MEROLA
merola@mat.uniroma3.it
http://ricerca.mat.uniroma3.it/users/merola/

k oggetti da n oggetti

Come scegliere k oggetti da un insieme di n oggetti?

quattro possibilità

	con ripetizioni	senza ripetizioni
ordine sì	n^k	$n(n-1)\ldots(n-k+1)$
ordine no	??	$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$

coefficiente binomiale $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

proprietà dei coefficienti binomiali

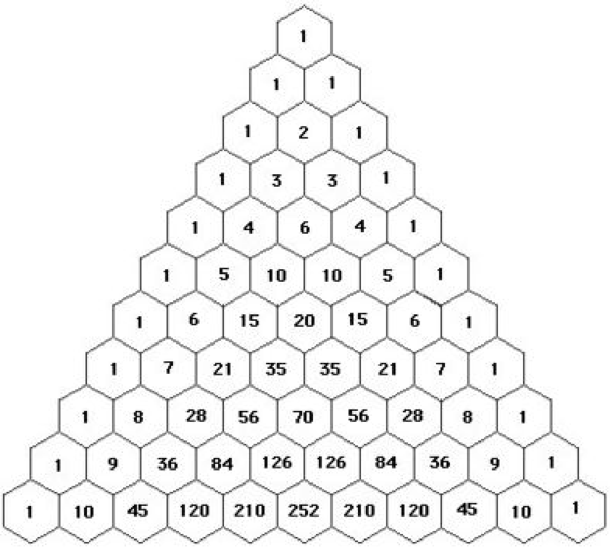
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$
- $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$
- $\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}$;
- $\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+m}{k}$;
- $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

?? $=$ k oggetti da n con ripetizione

- ex. $n = 3, \quad k = 4$ una scelta è $1, 1, 1, 3$
- $\#$ scelte di k oggetti da n con ripetizione $=$ $\#$ soluzioni dell'equazione
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$$
con x_i interi non negativi
- $\#$ soluzioni dell'eq
$$\binom{n+k-1}{n-1}$$

teorema del binomio

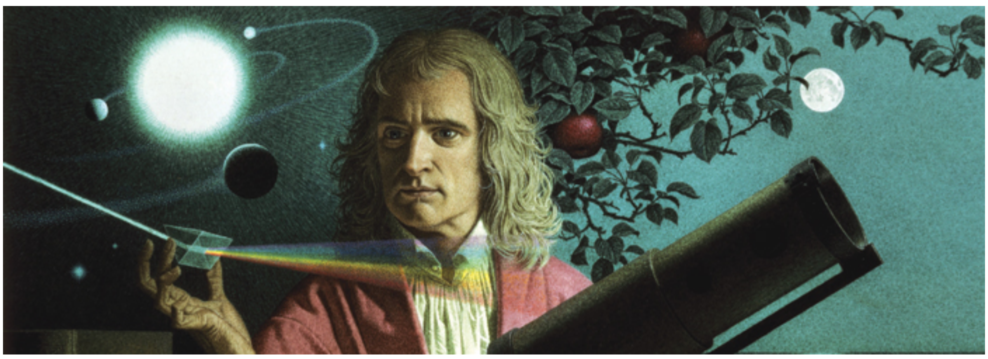
$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k$$



triangolo di Tartaglia/Pascal

teorema del binomio

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k$$



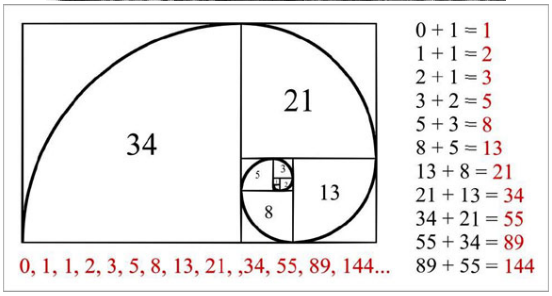
enumerazione

- ex. $f(n)$ è il # sottoinsiemi di un n-insieme
- $f(0) = 1, f(1) = 2$
- $f(n) = 2f(n-1)$ (relazione di ricorrenza)
- $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)t^n$
- questa è funzione generatrice – è una serie formale

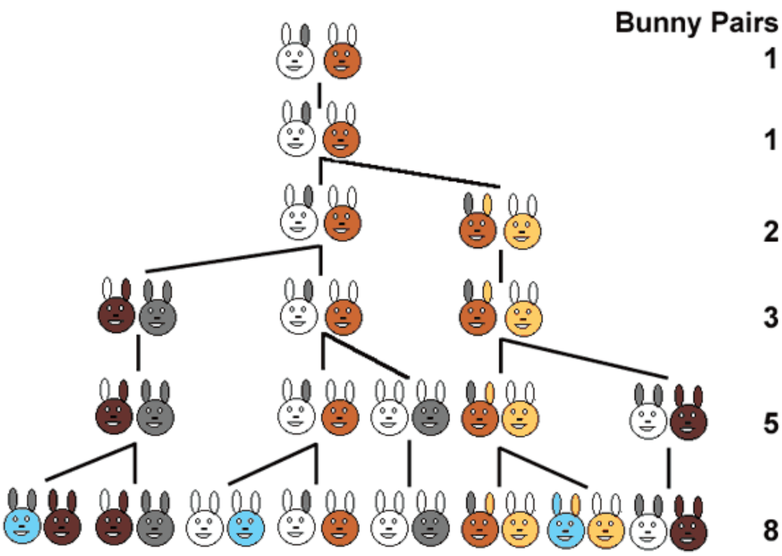
funzioni generatrici

- $f(n) = 2f(n-1)$
- $f(n)t^n = 2tf(n-1)t^{n-1}$
- $\sum_{n\geq 1} f(n)t^n = 2t\sum_{n\geq 1} f(n-1)t^{n-1}$
- $F(t) - 1 = 2tF(t)$
- $F(t) = \frac{1}{1-2t} = \sum_{n\geq 0}(2t)^n$
- $f(n) = 2^n$ (wow!)
- sono manipolazioni formali, non dobbiamo preoccuparci della convergenza...

Leonardo Fibonacci



Fibonacci e conigli



numeri di Fibonacci

- $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987 \ldots$
- $F_0 = F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
- $F_n t^n = tF_{n-1}t^{n-1} + t^2 F_{n-2}t^{n-2} =$
- $\sum_{n\geq 2} F_n t^n = t\sum_{n\geq 2} F_{n-1}t^{n-1} + t^2 \sum_{n\geq 2} F_{n-2}t^{n-2}$
- $F(t) = \sum_{n\geq 0} F_n t^n$ è la funzione generatrice per i numeri di Fibonacci
- $F(t) - 1 - t = t(F(t) - 1) - t^2 F(t)$

$$F(t) = \frac{1}{1 - t - t^2}$$

- vogliamo scrivere

$$F(t) = \frac{1}{1 - t - t^2} = \frac{1}{(1 - \alpha t)(1 - \beta t)} = \frac{a}{1 - \alpha t} + \frac{b}{1 - \beta t}$$

- allora α e β sono radici di $x^2 - x - 1$
- $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$ la sezione aurea, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
- facendo i conti si ha $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \; b = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

formula di Binet

$$F(t) = \frac{a}{1-\alpha t} + \frac{b}{1-\beta t} = a\sum_{n\geq 0}(\alpha t)^n + b\sum_{n\geq 0}(\beta t)^n$$

- da cui segue formula di Binet per i numeri di Fibonacci

$$F_n = a\alpha^n + b\beta^n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}$$

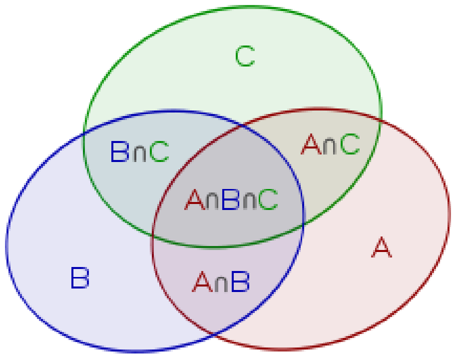
coefficienti non costanti

- le relazioni di ricorrenza viste finora sono a coefficienti costanti
- proviamo a calcolare il numero dei derangements
- permutazioni che non fissano nessun punto
- sia $d(n)$ il numero di derangements su n punti
- $d(0) = 1, d(1) = 0$
- la ricorrenza è
  $d(n) = (n-1)(d(n-1) + d(n-2))$
- la formula per il numero di derangements è
  $d(n) = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$
- possiamo verificare che soddisfa la ricorrenza e le condizioni iniziali, ma per ricavarla serve il principio di inclusione-esclusione

un esempio

- quanti interi fra 1 e 100 non sono divisibli per 2 per 3 o per 5?
- $X = \{x \in \mathbb{Z}, 1 \leq x \leq 100\}$, $|X| = 100$
- $A = \{\text{multipli di } 2\}$, $B = \{\text{multipli di } 3\}$, $C = \{\text{multipli di } 5\}$
- vogliamo conoscere $|X \setminus (A \cup B \cup C)|$
- $|A| = 50$, $|B| = 33$, $|C| = 20$
- $|A \cap B| = 16$, $|A \cap C| = 10$, $|B \cap C| = 6$, $|A \cap B \cap C| = 3$
- numero che ci interessa è

$$100 - (50 + 33 + 20) + 16 + 10 + 6 - 3 = 22$$



bibliografia

- H. Wilf, Generatingfunctionology, AP 1990, scaricabile presso www.math.upenn.edu/∼wilf/DownldGF.html
- P.J. Cameron, Combinatorics: topics techniques algorithms, CUP 1994
- R. Stanley, Enumerative Combinatorics I e II, CUP 1997
- R. Graham, D. Knuth, and O. Patashnik, Concrete Mathematics, Addison-Wesley 1994