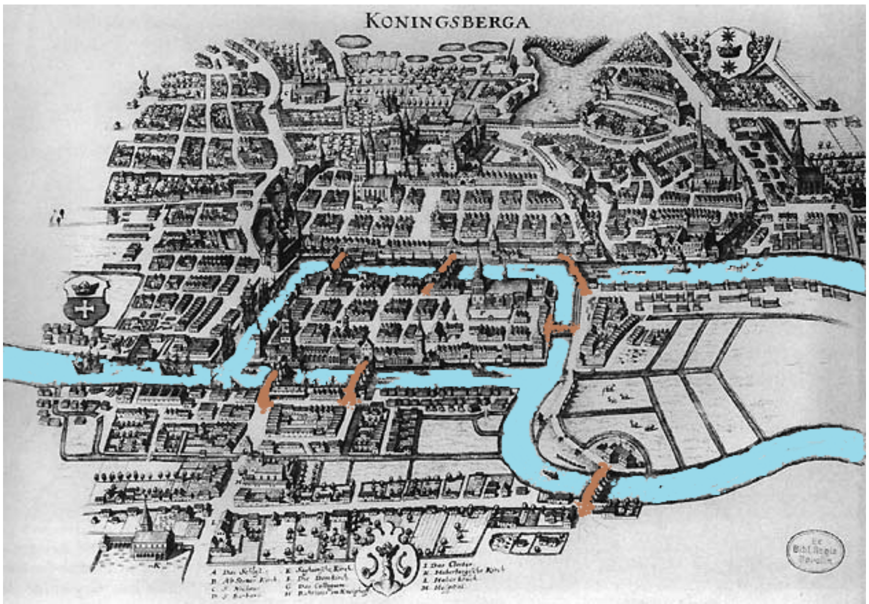
Università di Roma Tre

Geometria per il TFA
Introduzione alla teoria dei grafi

Francesca MEROLA
merola@mat.uniroma3.it
http://ricerca.mat.uniroma3.it/users/merola/

i ponti di Königsberg



è possibile fare una passeggiata in cui si attraversa esattamente una volta ognuno dei sette i ponti? NO Eulero 1735

Leonhard Euler

List of things named after Leonhard Euler

From Wikipedia, the free encyclopedia

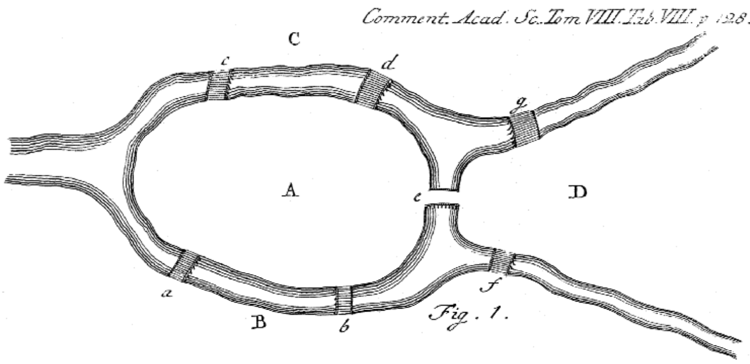
In mathematics and physics, there is a large number of topics named in honor of Leonhard Euler, many of which include their own unique function, equation, formula, identity, number (single or sequence), or other mathematical entity. Many of these entities have been given simple and ambiguous names such as **Euler's function**, **Euler's equation**, and **Euler's formula**.

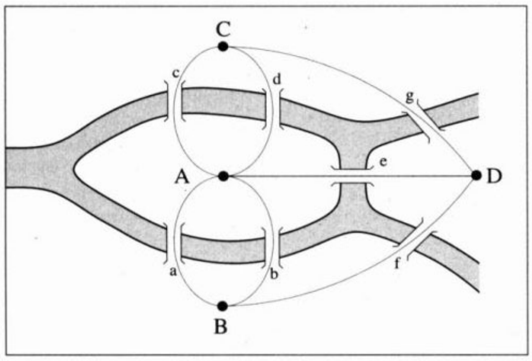
Euler's work touched upon so many fields that he is often the earliest written reference on a given matter. It has been said that, in an effort to avoid naming everything after Euler, discoveries and theorems are named after the first person *after* Euler to have discovered them.[1][2]

Contents [hide]

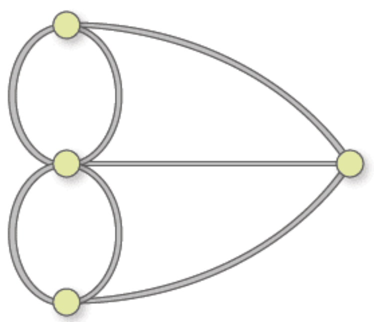
1 Euler's conjectures
2 Euler's equations
  2.1 Euler's ordinary equations
  2.2 Euler's partial differential equations
3 Euler's formulas
4 Euler's functions
5 Euler's identities
6 Euler's numbers
7 Euler's theorems
8 Euler's laws
9 Other things named after Euler
10 Topics by field of study
  10.1 Analysis: derivatives, integrals, and logarithms
  10.2 Geometry and spatial arrangement
  10.3 Graph theory
  10.4 Music
  10.5 Number theory
  10.6 Physical systems
  10.7 Polynomials
11 See also
12 Notes

schematizzazione dei ponti



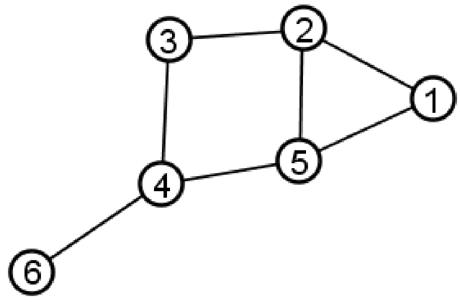


il (multi)grafo dei ponti



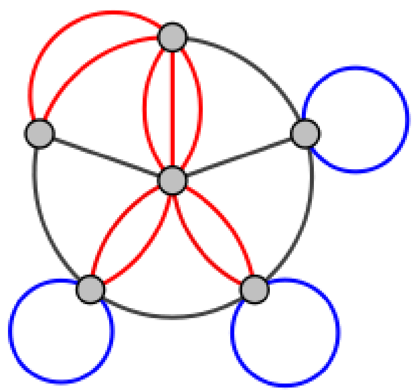
- non è possibile una passeggiata che passa per ogni lato esattamente una volta
- il numero di lati incidenti i vertici intermedi dev'essere pari

definizioni base



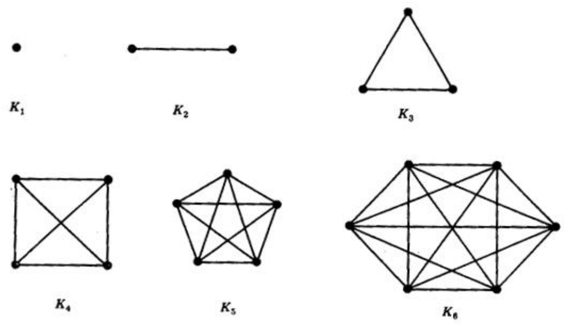
- un grafo G è una coppia (V, E)
- V un insieme finito con n elementi detti vertici (o nodi)
- $E \subseteq \binom{V}{2}$ un insieme di 2-sottoinsiemi di vertici
  - spigoli o lati, $|E| = e$ o m
- il numero di spigoli incidenti un dato vertice si dice valenza o grado ex. $d(v_4) = 3, d(v_6) = 1$

multigrafi



- con questa definizione non sono ammessi spigoli doppi né cappi
- se sono presenti queste caratteristiche, parliamo di multigrafo

grafi completi e nulli

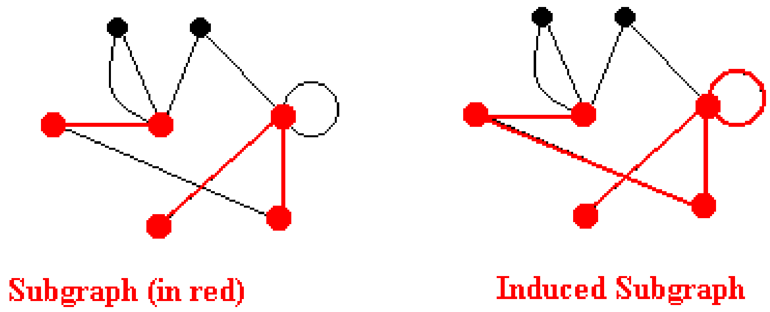


- K_n grafo completo - ogni coppia di vertici è congiunta da uno spigolo
- $d(v) = n - 1$, $e = \binom{n}{2}$
- N_n grafo nullo - nessuna coppia di vertici è congiunta da uno spigolo
- $d(v) = 0$, $e = 0$

primi risultati

- $\sum_{v \in V} d(v) = 2e$ (handshaking lemma)
  - il numero di vertici di valenza dispari è pari
  - se n è dispari, c'è almeno un vertice che ha grado pari
- un grafo in cui $d(v) = k$ per ogni vertice v si dice k-regolare
- se G è regolare con un numero dispari di vertici, il grado dev'essere pari
- esercizio: in ogni grafo ci sono due vertici con lo stesso grado

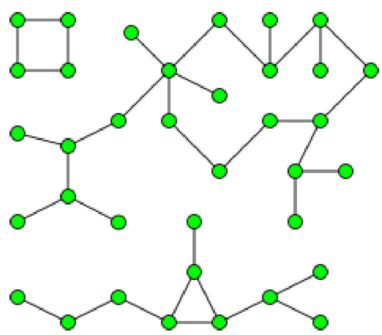
sottografi



- un grafo $G' = (V', E')$ si dice sottografo del grafo $G = (V, E)$ se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$ - $(G' \subseteq G)$
- $G' = (V', E')$ si dice sottografo indotto del grafo $G = (V, E)$ se è un sottografo e E' contiene tutti gli spigoli $\{x, y\}$ con $\{x, y\} \in E$ e x, y in V'

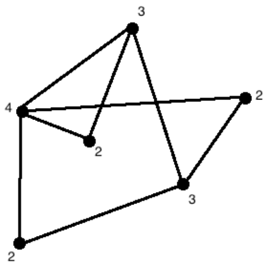
vari tipi di strade

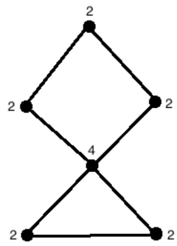
- in un grafo $G = (V, E)$ una passeggiata da un vertice x a un vertice y è una successione di vertici tale che due vertici consecutivi sono uno spigolo
- $x = v_0, v_1, \ldots v_{k-1}, v_k = y$ con $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$
    - si dice pista se non ha spigoli ripetuti
    - si dice cammino se non ha vertici ripetuti
- G è connesso se ogni coppia di suoi vertici è legata da una passeggiata
- $x \equiv y$ sse c'è una passeggiata da x a y è di equivalenza
- le classi di equivalenza si dicono componenti connesse



grafi euleriani

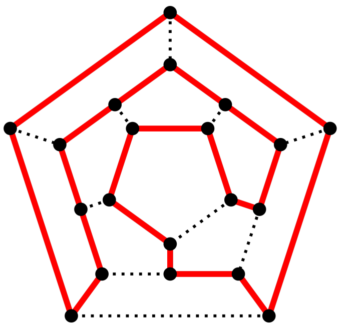
- una pista si dice euleriana se include tutti gli spigoli di un grafo
- un grafo si dice euleriano se possiede una pista euleriana chiusa, semieuleriano se aperta
- Teorema di Eulero Un (multi)grafo è euleriano sse è connesso e ogni vertice ha valenza pari. È semieuleriano sse è connesso e esattamente due vertici hanno valenza dispari.





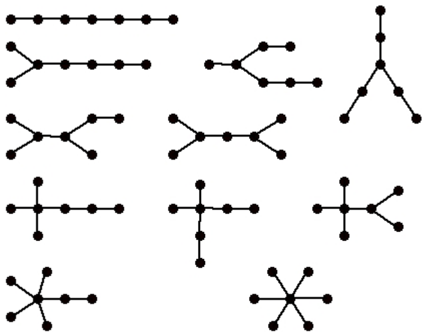
grafi hamiltoniani

- in cammino (o ciclo) di hamilton in un grafo è un cammino chiuso che passa per tutti i vertici esattamente una volta
- G hamiltoniano se possiede un cammino hamiltoniano
- $\nexists$ CNeS per stabilire se un grafo è hamiltoniano



alberi

- un ciclo è un cammino chiuso con almeno tre vertici
- un grafo connesso senza cicli si dice albero
- un grafo senza cicli si dice foresta
- in un albero ci sono almeno due vertici di valenza 1 (le foglie)
- un albero su n vertici ha $n-1$ spigoli

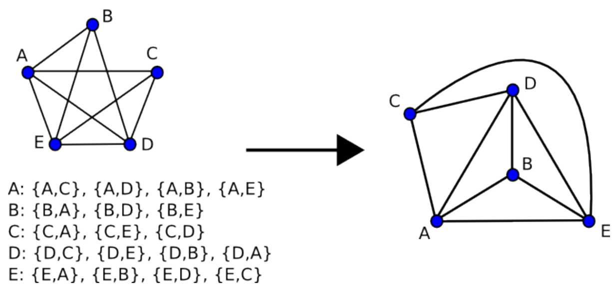


caratterizzazione degli alberi

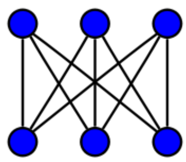
- le seguenti condizioni sono equivalenti
  - T è un albero
  - ogni coppia di vertici in T è congiunta da un unico cammino
  - T è connesso minimale: eliminando un qualunque spigolo da T si ottiene un grafo sconnesso
  - T è aciclico massimale: se si aggiunge uno spigolo, si ottiene un ciclo.

planarità

- grafo planare = grafo che si può immergere nel piano = si può disegnare senza che gli spigoli si intersechino
- K_4 è planare, K_5 meno uno spigolo è planare

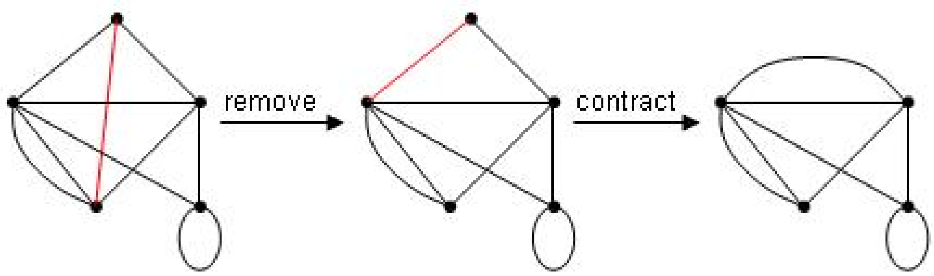


- ma K_5 non lo è
- e neanche $K_{3,3}$

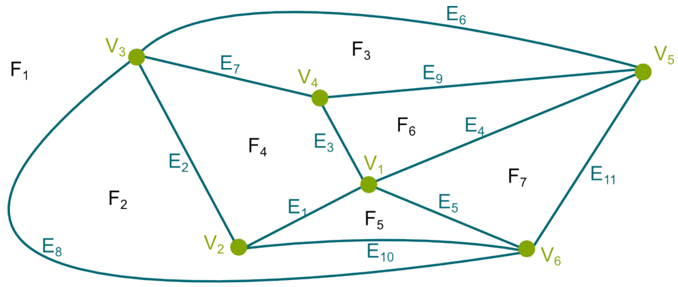


teorema di Wagner-Kuratowski

- un grafo è planare sse non "contiene" K_5 o $K_{3,3}$
- "contiene" come minore
- H è un minore di G se posso passare da G a H
  - eliminando vertici e/o spigoli
  - contraendo spigoli

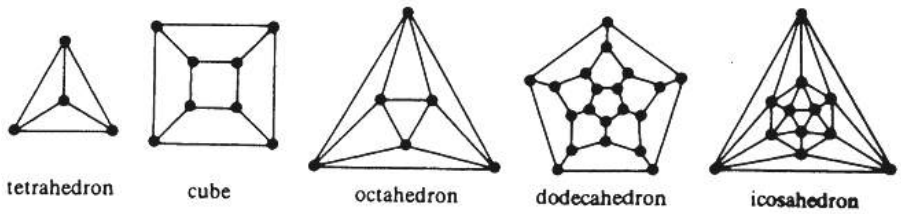


formula di Eulero



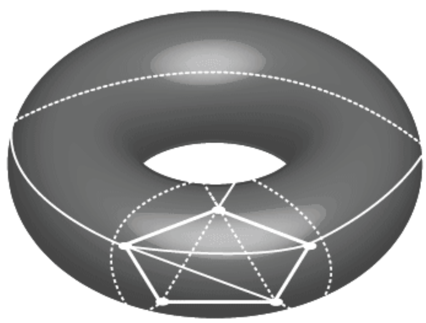
F - E + V = 7 - 11 + 6 = **2**

- per i grafi planari connessi vale la formula di Eulero
- # facce - # spigoli + #vertici = 2



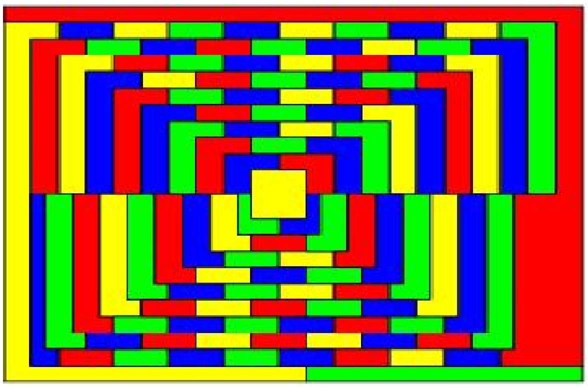
immersioni

- K_5 non è planare
- ma può essere immerso in un toro



- vero anche per $K_{3,3}$
- si parla di grafi toroidali

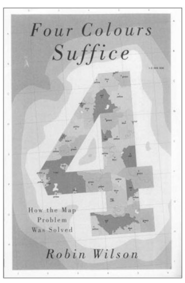
problema dei quattro colori



- è vero che per colorare ogni mappa bastano quattro colori?
- vogliamo che regioni "confinanti" abbiano colori diversi

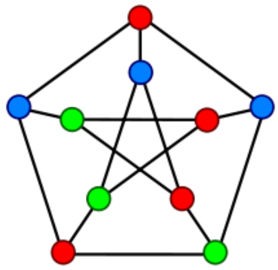
storia del problema

- nel 1852 il problema viene posto a De Morgan dal suo studente F. Guthrie;
  Cayley pubblica il problema nel 1878
- Kempe dimostra che 4 colori bastano nel 1879 11 anni dopo Heawood trova un errore
- Tait dà un'altra dimostrazione nel 1880 11 anni dopo Petersen trova un errore
- Birkhoff, Franklin, Heesch contribuiscono nel 1900
- dimostrazione di Appel e Haken nel 1976
- è la prima dimostrazione accettata dalla comunità matematica che fa un uso essenziale del computer



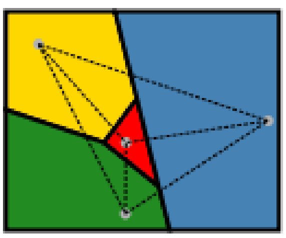
colorazioni di vertici

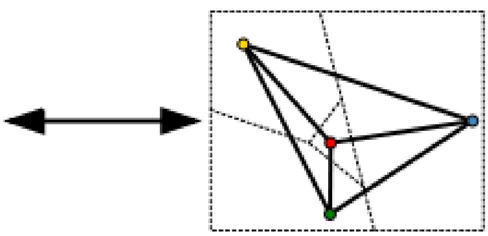
- una colorazione (dei vertici) di un grafo $G = (V, E)$
- è un'applicazione $\rho : V \to \mathbb{N}^+$
- tale che, se x e y sono adiacenti, $\rho(x) \neq \rho(y)$
- il minimo numero di "colori" in una colorazione di un grafo si chiama numero cromatico di G e si denota con $\chi(G)$



colorazioni di mappe e di grafi

- il teorema dei quattro colori si riformula facilmente in termini di colorazioni dei grafi
- si identifica ogni regione da colorare con un vertice
- se due regioni confinano i corrispondenti vertici sono adiacenti
- il grafo risultante è planare
- una colorazione dei vertici $\iff$ una colorazione della mappa
- teorema dei 4 colori $\iff$ ogni grafo planare G ha $\chi(G) \leq 4$





proposte

- Minimo albero ricoprente, algoritmo di Kruskal e di Prim
- Grafi hamiltoniani. problema del commesso viaggiatore
- Approfondimenti sulle colorazioni di grafi
- Reti, grafi aleatori e "aspetti sociali" della connessione
- Principio di Inclusione-Esclusione
- Grafi e reti di flusso - teorema Max Flow - Min Cut
- Il teorema dei quattro colori

bibliografia

- R. Diestel, Graph Theory, Springer, versione elettronica `http://diestel-graph-theory.com/`
- F. Bottacin, Note di teoria dei grafi, `http://www.dmi.unisa.it/people/bottacin/www/books/grafi_note.pdf`
- Bondy e Murty, Graph theory with applications, `http://www.iro.umontreal.ca/~hahn/IFT3545/GTWA.pdf`