Esercizi di geometria
Applicazioni lineari

A. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione tale che

$$f((x, y, z)) = (x - y + 2z,\ \alpha y,\ \alpha x - y + 3z).$$

1. Verificare che f è lineare.

2. (a) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica ($\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$) come base dello spazio di partenza e alla base canonica ($\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$) come base dello spazio di arrivo.
   (b) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$ come base dello spazio di partenza e alla base $\mathcal{B}' = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ come base dello spazio di arrivo.
   (c) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}'$ come base dello spazio di partenza e alla base canonica $\mathcal{B}$ come base dello spazio di arrivo.
   (d) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}'$ come base dello spazio di partenza e dello spazio di arrivo.

3. Trovare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che f è iniettiva, per quali suriettiva, per quali biiettiva.

4. Trovare una base e la dimensione per $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ (al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$).

5. Sia $\alpha = 0$. Trovare $f^{-1}((1,0,2))$ e $f^{-1}((0,1,2))$.

B. Stesso esercizio, usando l'applicazione $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$g((x, y, z)) = (\alpha x + y + \alpha z,\ (\alpha + 2)y + 2z,\ 2\alpha z).$$

C. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Le seguenti affermazioni sono vere o false?

- Se $v_1, \ldots, v_k$ sono vettori indipendenti in V, allora $f(v_1), \ldots, f(v_k)$ sono vettori indipendenti in W.
- Se $v_1, \ldots, v_k$ sono vettori dipendenti in V, allora $f(v_1), \ldots, f(v_k)$ sono vettori dipendenti in W.
- Se $f(v_1), \ldots, f(v_k)$ sono vettori indipendenti in W, allora $v_1, \ldots, v_k$ sono vettori indipendenti in V.
- Se $f(v_1), \ldots, f(v_k)$ sono vettori dipendenti in W, allora $v_1, \ldots, v_k$ sono vettori dipendenti in V.
- Se $\dim(V) > \dim(W)$, f non è iniettiva.
- Se f è suriettiva e $\dim V = \dim W$, f è iniettiva.