

Esercizi di Geometria

Foglio 1

1. Dire quali delle seguenti coppie di matrici possono essere moltiplicate fra loro; quando è possibile, calcolare il prodotto.

(a)

$$(1 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} (5 \ -2);$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Siano A, B le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$

calcolare AB e BA . Cosa potete osservare?

3. Verificare che

$$(AB)^T = B^T A^T$$

usando due matrici 2×2 arbitrarie.

4. Calcolare A^k , $k \in \mathbb{N}$, per le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. (a) Trovare una matrice $A \neq I$ tale che $A^2 = I$.
(b) Trovare una matrice $A \neq 0$ tale che $A^2 = 0$.

6. Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere, e quali false. (Fornire una dimostrazione se l'affermazione è vera, e un controesempio se falsa.) Siano A, B due matrici.

- (a) Se AB è definita, anche BA lo è.
- (b) Se AB è definita e A è una matrice quadrata, anche BA è definita.
- (c) Se $AB = BA$, allora A e B sono matrici quadrate dello stesso ordine.
- (d) Se A^2 è definita, allora A è una matrice quadrata.
- (e) Se $A^2 = I$, allora $A = I$; se $A^2 = 0$, allora $A = 0$.
- (f) Se A e B sono matrici quadrate dello stesso ordine, allora l'uguaglianza $(AB)^2 = A^2B^2$ è sempre vera.
- (g) Se A e B sono matrici quadrate dello stesso ordine, allora l'uguaglianza $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ è sempre vera.
- (h) Se A ha righe nulle, allora anche AB ha righe nulle.
- (i) Se A ha colonne nulle, allora anche AB ha colonne nulle.
- (j) Se B ha righe nulle, allora anche AB ha righe nulle.
- (k) Se B ha colonne nulle, allora anche AB ha colonne nulle.