Esercizi di Geometria

Foglio 2 - Determinanti, inverse e rango

1. Calcolare i determinanti delle seguenti matrici:

   (a)
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$$

   (b)
   $$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

   (c)
   $$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix};$$

   (d)
   $$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

   Calcolare l'elemento a_{21} della matrice A^{-1}, e l'elemento b_{23} di B^{-1}.

2. Calcolare il determinante di
   $$A = \begin{pmatrix} k & -1 & 2 \\ k & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$
   calcolare per quali valori di k la matrice A è invertibile. Scegliere poi uno di questi valori e calcolare A^{-1}.

3. Stesso esercizio per la matrice
   $$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

4. Verificare che valga $\det(A)\det(B) = \det(AB)$ per due matrici 2×2.

5. Studiare il rango delle seguenti matrici, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

   (a)
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & -2 & k \\ k & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} k-1 & 0 & k & 4 \\ 1 & 0 & k & -1 \\ 2 & 3 & k-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere, e quali false. (Fornire una dimostrazione se l'affermazione è vera, e un controesempio se falsa.) Siano A, B due matrici quadrate dello stesso ordine.

   (a) Se A è una matrice tale che $A^2 = I$, allora $\det(A) = \pm 1$.

   (b) Se $A^k = 0$ per qualche $k \in \mathbb{N}$, allora $\det(A) = 1$.

   (c) Se $\det(A) = 1$, allora $A = I$.

   (d) Se $\det(AB) = 0$, allora $\det(A) = 0$ oppure $\det(B) = 0$.

   (e) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

   (f) Se A è invertibile, allora $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

   (g) Se $\det(A) \neq 0$ e $AB = AC$, allora $B = C$.

   (h) $\det(AB) = \det(BA)$

   (i) Se A^2 è invertibile, allora anche A lo è.

   (j) Se A è invertibile e $AC = I$, allora $C = A^{-1}$.

   (k) Se A e B sono invertibili, allora anche AB lo è.

   (l) Se A e B sono invertibili, allora anche $A + B$ lo è.