

Esercizi di Geometria

Foglio 3

1. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i vettori di $\mathbb{R}^3$

(a) $v_1 = (1, 0, 1), \quad v_2 = (2, 1, 0), \quad v_3 = (0, 1, k);$

(b) $v_1 = (k, 1/3, 0), \quad v_2 = (-2, k, 0), \quad v_3 = (5k, -2, 1)$

sono linearmente dipendenti?

2. Esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$

(a) $v_1 = (1, 0, 1, 2), \quad v_2 = (2, 1, 0, 3), \quad v_3 = (0, 1, k, k+1);$

sono linearmente dipendenti?

3. Determinare i valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui i vettori

$$v_1 = (a, 1 - a, 2), \quad v_2 = (1, 3, -2), \quad v_3 = (0, 1, 1),$$

formano una base di $\mathbb{R}^3$.

4. (a) Sia $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - 2z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Verificare che W è un sottospazio e trovare una base e la dimensione di W .

(b) Stesso esercizio per $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z + y = 0\}$.

5. Sia $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | x + 2y - z + w = 0 \text{ e } z + 2y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$. Verificare che W è un sottospazio e trovare una base e la dimensione di W .

6. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

(a) Se $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ è un insieme di vettori indipendenti e $\{\mathbf{w}, \mathbf{z}\}$ è un insieme di vettori indipendenti, allora $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}\}$ è un insieme di vettori indipendenti.

(b) Se $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ è un insieme di vettori dipendenti o $\{\mathbf{w}, \mathbf{z}\}$ è un insieme di vettori dipendenti, allora $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}\}$ è un insieme di vettori dipendenti.

(c) Se $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ è un insieme di vettori indipendenti, allora anche $\{\mathbf{u}, \mathbf{u} + \mathbf{v}\}$ è un insieme di vettori indipendenti.

(d) L'insieme $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ è un sottospazio.

(e) L'insieme $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ è un sottospazio.

(f) L'insieme $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y - 1 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ è un sottospazio.