Combinatoria e matematica discreta
Foglio 2

1. Dare un esempio di applicazioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$ tali che $g \circ f$ sia iniettiva, ma almeno una fra f e g non lo sia; e lo stesso con "suriettiva" al posto di "iniettiva".

2. Dimostrare che se f e g sono iniettive [risp. suriettive] allora anche $f \circ g$ è iniettiva [risp. suriettiva].

3. Verificare quali delle seguenti relazioni ρ (in cui A è l'insieme su cui sono definite, e x e y sono elementi di A) sono riflessive, quali simmetriche, quali transitive, quali di equivalenza.

    (a) $A = \{x \mid x \text{ è un essere umano}\}$, $x\rho y$ se e solo se x e y sono nati nello stesso anno;

    (b) $A = \{x \mid x \text{ è un essere umano}\}$, $x\rho y$ se e solo se x e y sono figli dello stesso padre;

    (c) $A = \{x \mid x \text{ è un essere umano}\}$, $x\rho y$ se e solo se x e y hanno un genitore in comune;

    (d) A è l'insieme delle rette nel piano, $x\rho y$ se e solo se x e y sono parallele;

    (e) A è l'insieme delle rette nel piano, $x\rho y$ se e solo se x e y non sono parallele;

    (f) A è l'insieme delle rette nel piano, $x\rho y$ se e solo se x e y sono perpendicolari;

    (g) $A = \mathcal{P}(\{1, 2, 3, \})$, $x\rho y$ se e solo se $x \cap y \neq \emptyset$ ($\mathcal{P}$ = insieme delle parti - in questo caso x e y sono insiemi); per questa relazione, scrivere la matrice associata.

    (h) $A = \mathbb{Z}$, $x\rho y$ se e solo se $\mathrm{MCD}(x, y) = 1$;

    (i) $A = \mathbb{Z}$, $x\rho y$ se e solo se 2 divide $x - y$;

    (j) $A = \mathbb{Z}$, $x\rho y$ se e solo se 5 divide $x - y$.

4. Quali proprietà verifica la relazione ρ associata alla matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

5. Siano

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix},$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix};$$

    determinare $g^{-1} \circ f$.

6. Quante sono le permutazioni f di grado 6 tali che si abbia $f(1) = 1$? E tali che $f(2) = 4$?

7. Qual è l'ordine della permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}?$$

(L'ordine di una permutazione σ è il più piccolo intero n tale che $\sigma^n = \mathrm{id}$)

8. Trovare due permutazioni σ e τ di grado 4, diverse fra loro e diverse dall'identità, tali che $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$.