Esercizi di Geometria

Sottospazi

1. Siano $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 5y - z = 0\}$, e $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x - y + z = 0\}$. Allora:
   (a) verificare che S e T sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$;
   (b) trovare una base e la dimensione di S e T;
   (c) descrivere il sottospazio $S \cap T$, trovarne una base e la dimensione;
   (d) trovare una base e la dimensione di $S + T$;
   (e) Completare la base di S a una base di $\mathbb{R}^3$;
   (f) trovare un sottospazio vettoriale $\bar{S}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $S \cap \bar{S} = \{\mathbf{0}\}$ e $S + \bar{S} = \mathbb{R}^3$

2. Stesso esercizio, considerando i due sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid y - z = 0, \quad x + 2z = 0\},$$

$$T = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2w = 0\}.$$

3. Stesso esercizio, considerando i due sottoinsiemi di $M_2(\mathbb{R})$

$$S = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a - b = 0, \},$$

$$T = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a - b + 2d = 0\}.$$

4. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $\mathbf{v} = (k, 2, 1-k)$ appartiene al sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $\mathbf{v_1} = (1, 2, 0)$ e $\mathbf{v_2} = (0, 1, 1)$? Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, invece, i vettori $\{\mathbf{v}, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$?

5. (a) Mostrare che l'insieme $M_n(\mathbb{R})$ delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali è uno spazio vettoriale; trovare una base e calcolare la dimensione per tale spazio.
   (b) Mostrare che l'insieme $T_n^i(\mathbb{R})$ delle matrici triangolari inferiori $n \times n$ a coefficienti reali è un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{R})$; trovare una base e calcolare la dimensione per tale spazio. (Nota: le matrici triangolari inferiori sono le matrici (a_{ij}) tali che $a_{ij} = 0$ per $j > i$).