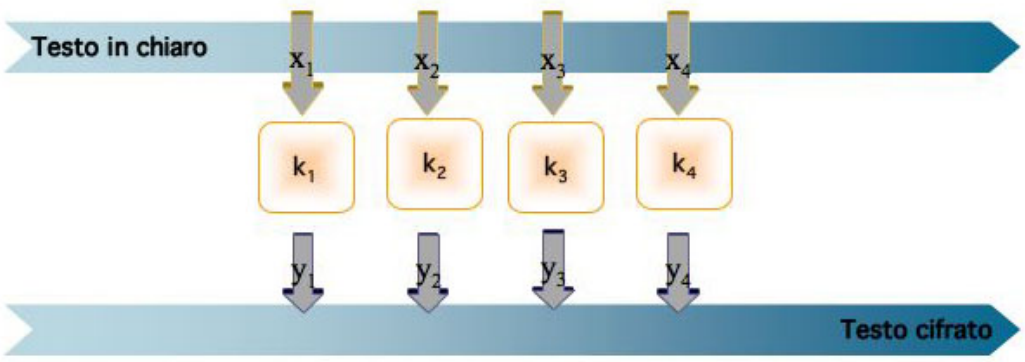
crittosistemi a flusso

Prendiamo $\mathbb{Z}_2$ come alfabeto;
in un *cifrario a flusso*, il testo in chiaro $x = x_1 x_2 \ldots$ viene cifrato bit per bit con la chiave $k = k_1, k_2, \ldots$ per ottenere il testo cifrato.



Nell'one-time pad, $x_i \oplus k_i = y_i$

crittosistemi a blocchi

- I cifrari a blocchi (o a pacchetti) lavorano su blocchi di informazione ognuno dei quali è cifrato e decifrato indipendentemente
- Il testo in chiaro è considerato come una sequenza di blocchi di m bit.
- Il testo cifrato ha la stessa lunghezza del testo in chiaro.
- Di fatto opera come una sostituzione su stringhe molto lunghe (64 bit o più)
- Quindi come una permutazione di 2^{64} numeri.
- Il DES opera su blocchi di 64 bit; l'AES su blocchi di 128 bit

crittosistemi prodotto

- Shannon in *Communication Theory of Secrecy Systems* introduce l'idea di combinare diversi crittosistemi prendendo il loro "prodotto".
- DES, AES sono CS prodotto
- consideriamo crittosistemi in cui $\mathcal{P} = \mathcal{C}$ (CS endomorfi): $S_1 = (\mathcal{P}, \mathcal{P}, \mathcal{K}_1, \mathcal{E}_1, \mathcal{D}_1)$, $\quad S_2 = (\mathcal{P}, \mathcal{P}, \mathcal{K}_2, \mathcal{E}_2, \mathcal{D}_2)$.
- Il prodotto $S_1 \times S_2$ è il crittosistema

$$(\mathcal{P}, \mathcal{P}, \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2, \mathcal{E}, \mathcal{D});$$

- data una chiave $k = (k_1, k_2)$, la corrispondente funzione di cifratura è

$$e_{(k_1,k_2)}(x) = e_{k_2}(e_{k_1}(x))$$

e la funzione di decifratura è

$$d_{(k_1,k_2)}(y) = d_{k_1}(d_{k_2}(y)).$$

crittosistemi prodotto

Infatti,

$$\begin{aligned} d_{(k_1,k_2)}(e_{(k_1,k_2)}(x)) &= d_{(k_1,k_2)}(e_{k_2}(e_{k_1}(x))) \\ &= d_{k_1}(d_{k_2}(e_{k_2}(e_{k_1}(x)))) \\ &= d_{k_1}(e_{k_1}(x)) \\ &= x. \end{aligned}$$

crittosistemi prodotto: esempio

- sia M il cifrario moltiplicativo: $\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathbb{Z}_{26}$; $\mathcal{K} = \{a \in \mathbb{Z}_{26} | (a, 26) = 1\}$;

$$e_a(x) = ax, \quad d_a(y) = a^{-1}y;$$

- sia S il cifrario additivo; $\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathcal{K} = \mathbb{Z}_{26}$;

$$e_k(x) = x + k, \quad d_k(y) = y - k;$$

- allora $M \times S$ è il cifrario affine!
- $e_{(a,k)}(x) = e_k(ax) = ax + k$

- osserviamo che anche $S \times M$ è il cifrario affine
- $e_{(k,a)}(x) = e_a(x + k) = ax + ka$
- i due crittosistemi commutano
- il prodotto di crittosistemi non è sempre commutativo
- ma è sempre associativo
- $(S_1 \times S_2) \times S_3 = S_1 \times (S_2 \times S_3)$

cifrari iterati

- spesso si considera il prodotto di un crittosistema S per se stesso; $S \times S = S^2$
- un crittosistema si dice idempotente se $S \times S = S$: (additivo, sostituzione, Vigenère sono idempotenti)
- se un crittosistema S non è idempotente, usare il CS S^n può aumentare la sicurezza
- questa idea è usata per esempio nel DES, che consiste di 16 iterazioni, o round

- per costruire crittosistemi non idempotenti da iterare
- si considera il prodotto di crittosistemi semplici, eventualmente idempotenti, ma che non commutino fra loro.
- perchè se S_1 e S_2 sono idempotenti e commutano, anche il loro prodotto $S_1 \times S_2$ è idempotente
  - $(S_1 \times S_2) \times (S_1 \times S_2) = S_1 \times (S_2 \times S_1) \times S_2$
    $= S_1 \times S_1 \times S_2 \times S_2 = S_1 \times S_2$

SPN

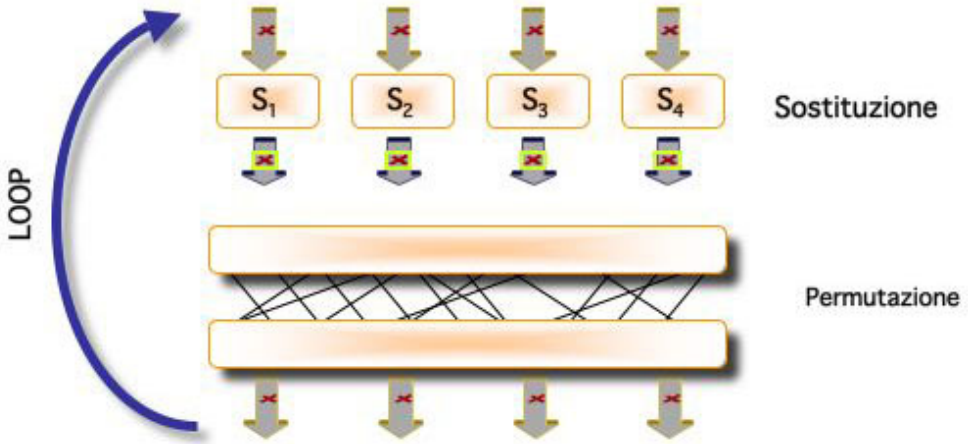
- questo è quello che succede nelle reti a sostituzione-permutazione (Substitution-permutazion network, o SPN)
- introdotte de Shannon in *Communication Theory of Secrecy Systems*
- queste reti sono la base della crittografia moderna
- forniscono confusione e diffusione di un messaggio

Shannon ha suggerito di usare crittosistemi che producano:

confusione: rende la relazione tra ciphertext e chiave la più complessa possibile.

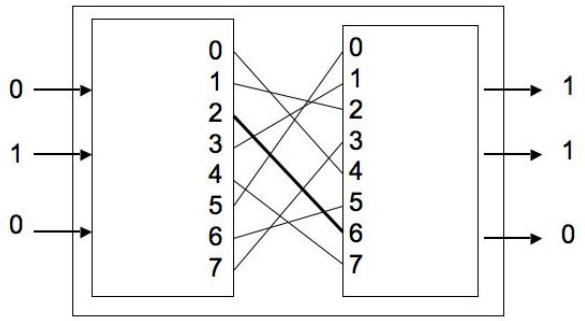
diffusione "sparge" la struttura statistica del testo in chiaro su tutto il testo cifrato.

SPN



SPN - Esempio

Blocchi lunghi $m = 3 \times 4$. Un blocco è:
010 001 101 011
Le S-box sono permutazioni π_S di $\{0, 1, \ldots, 7\}$: hanno come input e output una stringa binaria di lunghezza tre. Per sempicità, consideriamo una sola S-box.



010 001 101 011

$\downarrow$

110 010 000 001

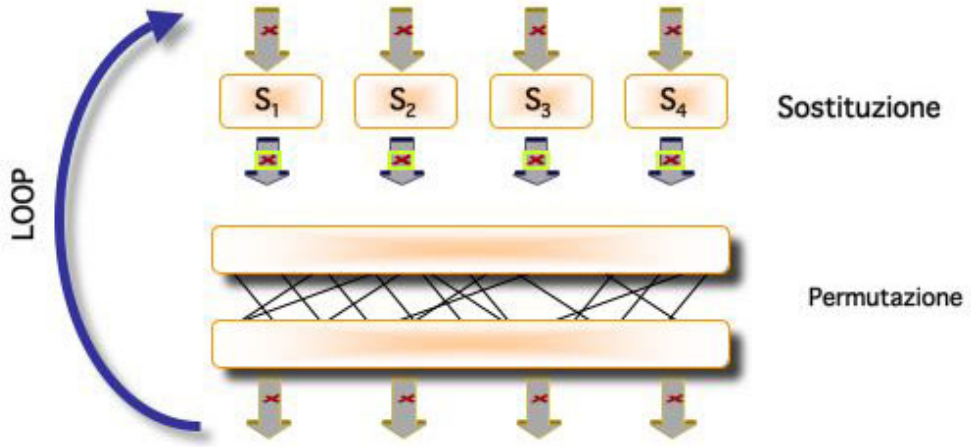
La P-box è una permutazione π_P di $\{1, 2, \ldots, 12\}$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	7	2	12	9	6	4	3	11	8	1	10

Quindi

010 001 101 011
$\downarrow \pi_S$
110 010 000 001
$\downarrow \pi_P$
000 010 101 100

SPN



key schedule

Abbiamo descritto un'iterazione.
In genere, in un SPN a R round, una chiave dà luogo a R chiavi di round (key schedule).
Nell'i-simo round,prima della S-box e della P-box, il testo in input viene combinato con la chiave tramite uno XOR.

Supponiamo che le rete del nostro esempio abbia 2 round: la chiave potrebbe essere una stringa binaria k di lunghezza 12, che produce due chiavi di round (k_1, k_2), per esempio $k_1 = k, k_2 = k \oplus 1$.

Vediamo come funziona l'SPN dell'esempio, se il testo in chiaro è $x = 001\ \ 110\ \ 101\ \ 001$, e la chiave è $k = 011\ \ 111\ \ 000\ \ 010$. Le chiavi di round sono $k_1 = k = 011\ \ 111\ \ 000\ \ 010$;
$k_2 = k \oplus 1 = 100\ \ 000\ \ 111\ \ 101$

$$
\begin{array}{rcccc}
x = & 001 & 110 & 101 & 001 \quad \oplus \\
k_1 = & 011 & 111 & 000 & 010 \\
 & 010 & 001 & 101 & 011 \\
 & & \downarrow & \pi_S & \\
 & 110 & 010 & 000 & 001 \\
 & & \downarrow & \pi_P & \\
 & 000 & 010 & 101 & 100 \\
 & & & & \oplus \\
k_2 = & 100 & 000 & 111 & 101 \\
 & 100 & 010 & 010 & 001 \\
 & & \downarrow & \pi_S & \\
 & 111 & 110 & 110 & 010 \\
 & & \downarrow & \pi_P & \\
 & 111 & 110 & 101 & 001 \quad = y
\end{array}
$$

SPN - descrizione generale

Siano l, k e R interi positivi, $m = l \cdot k$, sia $\pi_{S_i} : \{0,1\}^l \to \{0,1\}^l$ una permutazione, (per $i = 1, \ldots k$) e $\pi_P : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, m\}$ un'altra permutazione. Siano $\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathbb{Z}_2^m$, sia $\mathcal{K} = \mathbb{Z}_2^m$ assieme a un algoritmo di key scheduling che, data una chiave k, produce R chiavi di round $k_1, \ldots, k_R$. .
La cifratura funziona secondo il seguente schema informale:
per $i = 1, \ldots, R$

1. input $= x \quad i = 1$, o l'output del round $i - 1$ per $i > 1$.
2. fare lo XOR fra l'input e k_i.
3. a questo, applicare π_S.
4. a questo, applicare π_P.

l'output del R-simo round è il testo cifrato y.

confusione e diffusione

- confusione $\iff$ la relazione tra ciphertext e chiave deve essere molto complessa
- deve essere molto difficile risalire alla chiave anche conoscendo molte coppie plaintext-cyphertex
- cambiare un bit nella chiave deve cambiare molto il testo cifrato

- diffusione $\iff$ la relazione tra ciphertext e plaintext deve essere molto complessa
- cambiare un bit nel testo in chiaro deve cambiare molto il testo cifrato
- effetto valanga: se l'i-simo bit nel PT cambia, il j-simo bit del CT cambia con probabilità $\frac{1}{2}$ per ogni i, j

SPN: confusione e diffusione

- una SPN deve essere progettata con lo scopo di massimizzare confusione e diffusione
- le S-box vanno costruite massimizzando l'effetto valanga
- le P-box devono distribuire i bit in uscita da una singola S-box in modo che siano in entrata nel maggior numero possibile di S-box