

ordine di un gruppo

- G un gruppo finito: ordine di $G = o(G) =$ numero di elementi di G
- l'insieme degli invertibili di $\mathbb{Z}_n$ è un gruppo rispetto al prodotto
- si denota con $U(\mathbb{Z}_n)$ e ha ordine $\phi(n)$
- esempio: $U(\mathbb{Z}_9) = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$, ha $\phi(9) = 6$ elementi
- per $n = p$ primo, si ha $U(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p - \{0\} = \mathbb{Z}_p^*$, con $p - 1$ elementi

ordine di un elemento

- $(G, \cdot)$ un gruppo moltiplicativo di ordine n
- l'ordine di un elemento $g \in G$, $o(g)$, è il minimo intero positivo m tale che

$$g^m = 1$$

- (se $(G, +)$ è un gruppo additivo, l'ordine di un elemento $g \in G$ è il minimo intero positivo m tale che $mg = 0$)

- in $U(\mathbb{Z}_9)$, calcoliamo $o(2)$
 $2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16 = 7, 2^5 = 2 \cdot 7 = 14 = 5,$
 $2^6 = 2 \cdot 5 = 10 = 1$ quindi l'ordine di 2 è 6
- $o(2) = o(U(\mathbb{Z}_9)) = 6$
- ogni elemento di $U(\mathbb{Z}_9)$ si ottiene come una potenza dell'elemento 2
- si dice che 2 **genera** $U(\mathbb{Z}_9)$

gruppi ciclici

- **Definizione**

*Un gruppo G con n elementi tale esiste un elemento $g \in G$ con $o(g) = n$ si dice **ciclico**, e g si dice un **generatore** del gruppo*

- $U(\mathbb{Z}_9)$ è ciclico – p. es. $U(\mathbb{Z}_8)$ non lo è
- i gruppi $U(\mathbb{Z}_p)$, p primo, sono gruppi ciclici
- se $GF(p^m)$ è un campo finito, il gruppo moltiplicativo $(GF(p^m) - \{0\}, \cdot)$ è un gruppo ciclico
- in questi due esempi, i generatori si chiamano **radici primitive**, o elementi primitivi

logaritmo discreto

- sia G un gruppo ciclico di ordine n , sia g un generatore di G
- dato $y \neq 1 \in G$
- bisogna determinare l'unico intero x con $1 \leq x \leq n - 1$ tale che

$$g^x = y$$

- ex: in $U(\mathbb{Z}_9)$ con $g = 2$, se $y = 7$ si ha $x = 4$, perché $2^4 = 7$.
- l'intero x si chiama il **logaritmo discreto** di y in base g , e si denota con $\log_g y$
- ex: in $U(\mathbb{Z}_9)$, $4 = \log_2 7$

logaritmo discreto come funzione unidirezionale

- in generale, lavoreremo con il gruppo $U(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^*$
- dati g generatore di $\mathbb{Z}_p^*$ e x tale che $1 \leq x \leq p - 1$, calcolare $y = g^x$ è computazionalmente facile
- ($y \equiv g^x \pmod{p}$) – si usa l'algoritmo square-and-multiply)
- si ritiene che, dati g generatore di $\mathbb{Z}_p^*$ e $y \in \mathbb{Z}_p^*$, determinare $x = \log_g y$ sia difficile (sotto opportune ipotesi su p)
- in particolare, p devessere grande (1024 bit), $p \approx 2^{1023}$
- dati g e y posso trovare x tale che $g^x = y$ per tentativi – calcolando g^x per tutti gli x , $1 \leq x \leq p - 1$
- ma il numero di tentativi è enorme

cifratura RSA e logaritmo discreto

- nella cifratura RSA, la funzione è del tipo

$$x \longrightarrow x^e \pmod{N}$$

- nel problema del logaritmo discreto, la funzione è del tipo

$$x \longrightarrow g^x \pmod{p}$$

protocollo di scambio della chiave

- Alice e Bob non condividono informazioni segrete
- eseguono un protocollo, e alla fine hanno la stessa chiave
- Eve ascolta la comunicazione, ma non ottiene nessuna informazione sulla chiave

scambio della chiave di Diffie-Hellman

- Alice e Bob scelgono pubblicamente un primo p e un elemento primitivo $g \pmod{p}$
- Alice sceglie casualmente $a \in \{2, \dots, p-2\}$; calcola $g^a \pmod{p}$ e invia il risultato a Bob
- Bob sceglie casualmente $b \in \{2, \dots, p-2\}$; calcola $g^b \pmod{p}$ e invia il risultato a Alice
- Alice calcola $(g^b)^a \pmod{p}$
- Bob calcola $(g^a)^b \pmod{p}$
- la chiave è $k = g^{ab}$

- Esempio: $p = 23, g = 5$
- Alice sceglie $a = 6$ $g^a = 5^6 \equiv 8 \pmod{23}$
- Bob sceglie $b = 15$ $g^b = 5^{15} \equiv 19 \pmod{23}$
- Alice calcola $(g^b)^a = 19^6 \equiv 2 \pmod{23}$
- Bob calcola $(g^a)^b = 8^{15} \equiv 2 \pmod{23}$

DH problem

- se Eve sa risolvere il problema del logaritmo discreto, sa ricavare la chiave comune di Bob e Alice
- dall'osservazione di $g^a, g^b \bmod p$ ricava a e b , quindi calcola $k = g^{ab}$
- **DH problem:** dato un gruppo ciclico G , g un generatore e dati g^a, g^b trovare g^{ab}
- basta che sappia risolvere il DH problem per trovare la chiave
- equivalenza DH - DL?

- per implementare il protocollo, bisogna essere in grado di produrre numeri primi grandi
- e dato un tale primo p , di trovare una radice primitiva g modulo p
- sicurezza: p almeno 1024 bit, $p - 1$ con un fattore primo grande
- si cerca anche un $p - 1$ a fattorizzazione nota (per trovare facilmente g)
- spesso si sceglie $p = 2q + 1$, q un primo
- la fattorizzazione è $p - 1 = 2q$
- un numero primo q tale che anche $2q + 1$ è primo si chiama **primo di Sophie Germain**
- **osservazione:** la funzione unidirezionale $x \rightarrow g^x \pmod{p}$ **non** ha una trapdoor

crittosistema Elgamal (ca 1985)

- sia p un primo, g un elemento primitivo mod p
- $\mathcal{P} = U(\mathbb{Z}_p)$
- $\mathcal{C} = U(\mathbb{Z}_p) \times U(\mathbb{Z}_p)$
- Lo spazio delle chiavi è

$$\mathcal{K} = \{(p, g, a, \beta) \mid \beta \equiv g^a \pmod{p}\}.$$

- p , g e β sono la **chiave pubblica** – a è la **chiave privata**

crittosistema Elgamal

- **prima** di cifrare il messaggio $x \in \mathcal{P}$, Bob **sceglie un numero casuale (segreto) $h \in \{2, \dots, p-2\}$**
- $e_k(x, h) = (y_1, y_2)$
- con $y_1 = g^h$, $y_2 = x\beta^h \pmod{p}$
- Alice riceve $(y_1, y_2) \in U(\mathbb{Z}_p) \times U(\mathbb{Z}_p)$ – **non conosce h** ma conosce a
- calcola $y_1^a = (g^h)^a = (g^a)^h = \beta^h \pmod{p}$
- calcola $(\beta^h)^{-1} \pmod{p}$ e ottiene $x = y_2(\beta^h)^{-1}$
- $d_k((y_1, y_2)) = y_2(y_1^a)^{-1} \pmod{p}$
- notare la somiglianza con DH – non si inverte la funzione $x \rightarrow g^x \pmod{p}$
- Bob sceglie un nuovo h a ogni trasmissione (randomized encryption)

esempio

- Alice sceglie $p = 83$, $g = 2$ e la chiave privata $a = 30$
 - $\beta = 2^{30} \equiv 40 \pmod{83}$
 - la chiave pubblica di Alice è $(83, 2, 40)$
 - il messaggio di Bob è $x = 54$ – il numero scelto per la cifratura è $h = 13$
 - Bob invia $(g^h, x\beta^h) = (2^{13}, 54 \cdot 40^{13}) \equiv (58, 71) \pmod{83}$
 - per decifrare, Alice calcola $(g^a)^h = 58^{30} = 9$
 - l'inverso di $9 \pmod{83}$ è 37 – il messaggio è quindi $37 \cdot 71 = 54 \pmod{83}$
-
- anche per Elgamal, si usa p di almeno 1024 bit, $p - 1$ con un fattore primo grande e a fattorizzazione nota
 - anche per violare Elgamal, basta che Eve sappia risolvere il DH problem
 - se dati g^h e $\beta = g^a$ sa trovare $g^{ah} = \beta^h$, può leggere il messaggio
 - se Eve sa risolvere il logaritmo discreto può ricavare l'esponente h e quindi ricavare direttamente x
 - oppure ricavare a e decifrare come Alice (conviene – h cambia in ogni trasmissione)