

Elementi di crittografia

Francesca Merola

informazioni

- orario: me-gio 9.45 - 11.15, aula N2
- ricevimento: su appuntamento
gio 13.30 – 15.30
studio 300 dipartimento di matematica
- pagina web:
<http://ricerca.mat.uniroma3.it/users/merola/>
- email: merola@mat.uniroma3.it

Testi consigliati

- D. Stinson: Cryptography - theory and practice
- Languasco, Zaccagnini: Introduzione alla crittografia
- Baldoni, Ciliberto, Piacentini: Aritmetica, crittografia e codici
- Katz, Lindell: An introduction to modern cryptography
- W. Stallings: Crittografia e sicurezza delle reti.
- B. Schneier: Applied Cryptography

schema del corso

- crittografia classica
- cifrari a blocchi e cifrari a flusso
- SPN, cifrario di Feistel, DES, AES
- crittografia a chiave pubblica
 - cifrari basati su fattorizzazione: RSA
 - cifrari basati sul logaritmo discreto: El Gamal
 - firma digitale
- alcuni protocolli crittografici

Crittografia - dal greco

κρυπτος, nascosto

γραφειν, scrivere

crittografia

crittologia

crittoanalisi

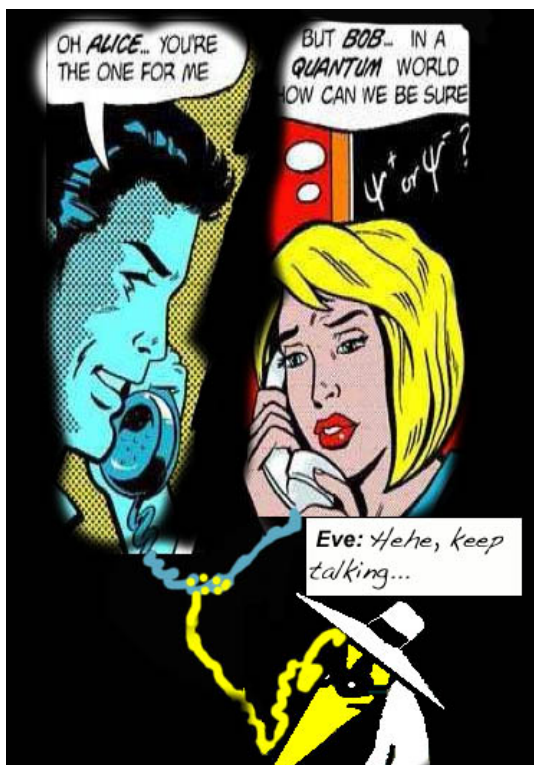
- classicamente, crittografia = nascondere il contenuto di un messaggio
- più di recente, molti altri usi:
 - autenticazione di un messaggio/interlocutore
 - scambio di una chiave segreta
 - firma digitale
 - condivisione di un segreto
 - e molto altro



Alice



Bob



Alice



Bob

← Eve

la scitola - un cifrario a trasposizione



atbash - un cifrario a sostituzione



ABCDEFGHIJKLM
ZYXWVUTSRQPON
ciao → YRZL

crittosistema: definizione

Definizione

Un crittosistema è una quintupla $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$, dove

- ① $\mathcal{P}$ è un insieme finito di testi in chiaro (plaintext)
- ② $\mathcal{C}$ è un insieme finito di testi cifrati (ciphertext)
- ③ $\mathcal{K}$ è un insieme finito di chiavi. ($\mathcal{K}$ è detto spazio delle chiavi)
- ④ per ogni $k \in \mathcal{K}$ c'è una funzione di cifratura $e_k \in \mathcal{E}$,
 $e_k : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}$ e una funzione di decifratura $d_k \in \mathcal{D}$, $d_k : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}$
tali che, per ogni $x \in \mathcal{P}$ si ha

$$d_k(e_k(x)) = x$$

se si ha $x, y \in \mathcal{P}$ con $x \neq y$,
allora dev'essere anche, per ogni chiave k , $e_k(x) \neq e_k(y)$;
le funzioni di cifratura devono essere **iniettive**.

cifrario additivo (shift cipher)

- $\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathcal{K} = \mathbb{Z}_{26}$;
- fissiamo $0 \leq k \leq 25$; allora
 - $e_k(x) = (x + k) \bmod 26$,
 - $d_k(y) = (y - k) \bmod 26$.

Nota: quando $k = 3$, si ha il [cifrario di Cesare](#).

Identifichiamo $\mathbb{Z}_{26}$ con l'alfabeto:

A	B	C	D	E	F	G	H	I
0	1	2	3	4	5	6	7	8
J	K	L	M	N	O	P	Q	R
9	10	11	12	13	14	15	16	17
S	T	U	V	W	X	Y	Z	
18	19	20	21	22	23	24	25	

esempio

la chiave è $k = 9$

s	a	l	u	t	i	d	a	l	m	a	r	e
18	0	11	20	19	8	3	0	11	12	0	17	4
1	9	20	3	2	17	12	9	20	21	9	0	13
B	J	U	D	C	R	M	J	U	V	J	A	N

Nota: spesso si pensa la chiave come una lettera, non come un numero (in questo esempio la chiave è J).

Proprietà di un buon crittosistema:

- Dev'essere possibile calcolare ogni e_k e d_k in modo "efficiente";
- Eve non deve essere in grado di risalire al testo in chiaro (o peggio, alla chiave) dal testo cifrato.

Per i cifrari additivi, si hanno solamente 26 possibili chiavi!!

Provare a [decrittare](#) il messaggio

L	E	E	P	Y	E	T	L	W	N	L	Y	P
a	t	t	e	n	t	i	a	l	c	a	n	e

la chiave è 11 (oppure L)

in un crittosistema, bisogna che
 $x, y \in \mathcal{P}, x \neq y, \Rightarrow e_k(x) \neq e_k(y)$; le funzioni di cifratura devono
essere iniettive.

$\mathcal{P}$ e $\mathcal{C}$ sono insiemi *finiti*

se in un crittosistema si ha $\mathcal{P} = \mathcal{C}$,

una funzione $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{C} = \mathcal{P}$

è iniettiva $\Leftrightarrow$ è suriettiva $\Leftrightarrow$ è biiettiva

dunque in questo caso le funzioni di cifratura sono

[permutazioni](#) di $\mathcal{P}$

permutazioni

Se X è un insieme finito con n elementi
un'applicazione **biiettiva** $\pi : X \rightarrow X$ si dice **permutazione** di X .

Ci sono $n! = n \cdot (n - 1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ permutazioni di X .

L'insieme delle permutazioni di un insieme con n elementi
è un gruppo rispetto al prodotto operatorio fra applicazioni; per
 $n \geq 3$ è un gruppo non commutativo.

Si chiama il **gruppo simmetrico**, e si denota con S_n .

cifrari a sostituzione

$$\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathbb{Z}_{26}$$

$$\mathcal{K} = \{ \text{permutazioni di } \mathbb{Z}_{26} \} = S_{26}$$

per ogni $\pi \in \mathcal{K}$, si ha

$$e_{\pi}(x) = \pi(x), \quad \text{e} \quad d_{\pi}(y) = \pi^{-1}(y).$$

identificheremo $\mathbb{Z}_{26}$ con l'alfabeto

sia π la permutazione

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
F	X	H	G	N	O	K	A	U	P	S	V	T

n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
Q	L	M	D	I	R	Y	C	J	E	Z	B	W

allora π^{-1} è

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
h	y	u	q	w	a	d	c	r	v	g	o	p

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
e	f	j	n	s	k	m	i	l	z	b	t	x

c i v e d i a m o p o i
H U J N G U F T L M L U

Proprietà di un buon crittosistema:

- Dev'essere possibile calcolare ogni e_k e d_k in modo "efficiente";
- Eve non deve essere in grado di risalire alla chiave (o al testo in chiaro) dal testo cifrato.

Per i cifrari additivi, si hanno solamente 26 possibili chiavi!

Nel caso di una sostituzione generica, il numero di chiavi è molto alto

$$|\mathcal{K}| = 26! \approx 4 \cdot 10^{26}.$$

questo non basta a garantire la sicurezza!