

Elementi di crittografia

Francesca Merola

lezione 2

crittosistema: definizione

Definizione

Un crittosistema è una quintupla $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$, dove

- ① $\mathcal{P}$ è un insieme finito di testi in chiaro (plaintext)
- ② $\mathcal{C}$ è un insieme finito di testi cifrati (ciphertext)
- ③ $\mathcal{K}$ è un insieme finito di chiavi. ($\mathcal{K}$ è detto spazio delle chiavi)
- ④ per ogni $k \in \mathcal{K}$ c'è una funzione di cifratura $e_k \in \mathcal{E}$,
 $e_k : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}$ e una funzione di decifratura $d_k \in \mathcal{D}$, $d_k : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}$
tali che, per ogni $x \in \mathcal{P}$ si ha

$$d_k(e_k(x)) = x$$

cifrari affini

$$\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathbb{Z}_{26}$$

$$\mathcal{K} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}_{26}, (a, 26) = 1\};$$

per ogni $(a, b) \in \mathcal{K}$, si ha

$$e_{(a,b)}(x) = ax + b, \quad \text{e} \quad d_{(a,b)}(y) = a^{-1}(y - b).$$

Esempio: sia $k = (5, 12)$,

allora si ha $e_{(5,12)}(x) = 5x + 12$,

e $d_{(5,12)}(y) = 21(y - 12) = 21y + 8$.

se $x = 3$, si ha $e_{(5,12)}(3) = 15 + 12 = 27 = 1$

e $d_{(5,12)}(1) = 21 + 8 = 29 = 3$

cifrari a trasposizione

$$\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathbb{Z}_{26}^m$$

abbiamo una m -pla di lettere;

$$\mathcal{K} = \{ \text{permutazioni di } \{1, 2, \dots, m\} \} = S_m$$

per ogni $\pi \in \mathcal{K}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathcal{P}$,

$y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathcal{C}$ si ha

$$e_{\pi}(x) = (x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(m)});$$

$$d_{\pi}(y) = (y_{\pi^{-1}(1)}, y_{\pi^{-1}(2)}, \dots, y_{\pi^{-1}(m)});$$

cifrario di Vigenère

- è un cifrario polialfabetico
- m un intero positivo - sarà la lunghezza della chiave
- $\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathcal{K} = (\mathbb{Z}_{26})^m$
- se $k = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ si ha
 - $e_k(x_1, x_2, \dots, x_m) = (x_1 + k_1, x_2 + k_2, \dots, x_m + k_m)$
 - $d_k(y_1, y_2, \dots, y_m) = (y_1 - k_1, y_2 - k_2, \dots, y_m - k_m)$
- tutto modulo 26
- esempio: sia $m = 5$ e $k = (5, 8, 14, 17, 4)$
- se $x = (4, 0, 17, 17, 8)$, allora $e_k(x) = (9, 8, 5, 8, 12)$
- la crittoanalisi è molto più difficile!

cifrario di Hill

- è un cifrario polialfabetico
- m un intero positivo: $\mathcal{P} = \mathcal{C} = (\mathbb{Z}_{26})^m$ pensati come vettori colonna
- $\mathcal{K} = \{\text{matrici } m \times m \text{ a coefficienti in } \mathbb{Z}_{26} \text{ invertibili in } \mathbb{Z}_{26}\}$
- $K \in \mathcal{K}$ è una matrice $m \times m$, $x \in \mathcal{P}$ è una m -pla; la cifratura è il prodotto righe per colonne
 - $e_K(x) = Kx$
 - $d_K(y) = K^{-1}y$
- tutto modulo 26
- la funzioni di cifratura e decifratura sono trasformazioni lineari
- quali sono le matrici invertibili in $\mathbb{Z}_{26}$?

- una matrice A a coefficienti reali è invertibile $\iff \det(A) \neq 0$
- una matrice A a coefficienti in $\mathbb{Z}_n$ è invertibile $\iff \det(A)$ è invertibile in $\mathbb{Z}_n \iff (\det(A), n) = 1$
- esempio: $n = 26$, $K = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$, $\det(K) = 53 = 1$
- $K^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -8 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 23 \\ 18 & 11 \end{pmatrix}$
- $e_K \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
- $d_K \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 23 \\ 18 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 106 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

cifrario lineare affine

- generalizza il cifrario di Hill
- m un intero positivo: $\mathcal{P} = \mathcal{C} = (\mathbb{Z}_{26})^m$
- $\mathcal{K} = \{(A, b), A \text{ matrice invertibile}, b \in (\mathbb{Z}_{26})^m\}$
- se $k = (A, b)$, si ha
 - $e_k(x) = Ax + b$
 - $d_k(y) = A^{-1}(y - b)$
- tutto modulo 26
- la funzioni di cifratura e decifratura sono trasformazioni affini
- quasi tutti i cifrari visti fino a ora sono di questo tipo!