protocolli

- un protocollo è costituito da una serie di passi (step) e coinvolge due o più persone (parti, entità) allo scopo di svolgere un incarico
- proprietà
  - ogni persona coinvolta deve conoscere il protocollo in anticipo
  - ogni partecipante deve eseguire le disposizioni del protocollo
  - il protocollo non deve essere ambiguo
  - il protocollo deve essere completo
- un protocollo crittografico è un protocollo che utilizza la crittografia

protocolli

- le parti si chiamano Alice, Bob, Carol, Davide,...
- a volte c'è un super-user chiamato Trent
- abbiamo già visto esempi di protocolli
  - scambio della chiave
  - scelta di un crittosistema e trasmissione di un messaggio cifrato
  - firma digitale

secret splitting – divisione di un segreto

- solo il presidente della ACME conosce la ricetta della ACME-cola^{TM}
- se comunica la ricetta a un suo collaboratore, questi la può rivendere alla concorrenza
- si vuole un metodo che consenta di dividere l'informazione fra due o più collaboratori
- in modo che l'informazione che si dà a un singolo non consenta di risalire alla ricetta completa
- ma solo la conoscenza di ogni "parte" di informazione permetta di ricostruire il segreto

secret splitting

- Trent vuole dividere un segreto fra Alice e Bob
- il segreto è un messaggio M – che pensiamo come una stringa binaria di lunghezza l
- Trent genera in maniera casuale un'altra stringa binaria r di lunghezza l
- calcola lo XOR fra M e r:

$$s = M \oplus r$$

- comunica r ad Alice e s a Bob
- Alice e Bob insieme possono ricostruire $M = s \oplus r$
- ma la conoscenza solo di s o solo di r non dà alcuna informazione su M
- di fatto, Trent cifra il messaggio con un one-time pad e dà il testo cifrato a Bob e la chiave ad Alice; abbiamo provato che l'one-time pad è a segretezza perfetta

secret splitting

- questo schema si generalizza immediatamente
- se Trent deve dividere il segreto M fra k "collaboratori" $A_1, A_2, \ldots A_k$
- genera $k-1$ stringhe binarie $r_1, r_2, \ldots r_{k-1}$ di lunghezza l
- calcola $s = M \oplus r_1 \oplus r_2 \cdots \oplus r_{k-1}$
- comunica r_1 a A_1, r_2 a A_2, $\ldots$ r_{k-1} a A_{k-1}e s a A_k
- in questo protocollo, l'unico modo per ricostruire il segreto è avere accesso a tutte le informazioni parziali

secret sharing – condivisione di un segreto

- bisogna progettare uno schema per il lancio di un missile nucleare
- dieci ufficiali della base hanno le chiavi di lancio
- si vuole uno schema in cui un ufficiale (improvvisamente impazzito) non possa lanciare il missile da solo
- e neanche due o tre ufficiali possano lanciare il missile ma quattro sì
- o anche bisogna progettare uno schema in cui, per autorizzare un lancio, servano
  - due generali
  - oppure un generale e due colonnelli
  - oppure quattro colonnelli

threshold scheme – schema a soglia

- problemi di questo tipo sono risolti da un (m, n)–threshold scheme (schema a soglia (m, n))
- è uno schema in cui il segreto viene diviso in n parti, chiamate ombre o "shares"
- in modo tale che bastino m ombre per ricostruire il segreto $(m < n)$
- nell'esempio precedente si ha $m = 4$, $n = 10$.
- in uno schema in cui alcuni utenti sono più "importanti" di altri, gli utenti più "importanti" ricevono più di un'ombra
- nell' esempio, si ha uno schema a soglia con $m = 4$ in cui ogni colonnello ha un'ombra, ogni generale ne ha due

schema a soglia di Shamir

- è uno schema a soglia che usa l'interpolazione di Lagrange in un campo finito $\mathbb{Z}_p$
- p è un primo maggiore del massimo numero di ombre; il segreto è un elemento M di $\mathbb{Z}_p$
- per creare un (m, n)-schema a soglia, Trent genera un polinomio $f(x)$ di grado $m - 1$ a coefficienti in $\mathbb{Z}_p$ in cui il termine noto è il segreto M
- e n elementi distinti $x_1, x_2 \dots x_n$ in $\mathbb{Z}_p$
- le n ombre si ottengono calcolando il valore che il polinomio assume nei punti: $k_i = f(x_i)$
- l'i-esimo partecipante allo schema conosce m, il primo p e la coppia $(x_i, k_i = f(x_i))$
- con almeno m ombre si riesce a determinare il polinomio – e quindi a ricostruire il segreto!

schema di Shamir – esempio

- sia $M = 11$ – vogliamo realizzare uno schema $(3, 5)$
- Trent sceglie $p = 13$ e genera il polinomio di grado due $f(x) = 7x^2 + 8x + 11 \pmod{13}$
- le cinque ombre si ottengono calcolando f per esempio in $1, 2, 3, 4, 5$
  $f(1) = 26 = 0,\ f(2) = 55 = 3,\ f(3) = 98 = 7,$
  $f(4) = 155 = 12,\ f(5) = 226 = 5$
- per ricostruire il polinomio dobbiamo conoscere il primo p e almento tre ombre – per esempio dalla conoscenza della prima, seconda e terza si ha il sistema

$$\begin{cases} a + b + M = 0 \\ 2^2 a + 2b + M = 3 \quad (\bmod 13) \\ 3^2 a + 3b + M = 7 \end{cases}$$

  nelle incognite a, b e M
- risolvendo il sistema, si ritrova $a = 7$, $b = 8$ e M=11

interpolazione di Lagrange

- usando l'interpolazione di Lagrange, dati $x_1, \dots x_m$ distinti
- $\exists!\ p(x)$ di grado $\leq m - 1$ tale che $f(x_i) = k_i$, $i = 1, \dots, m$
- per trovarlo si calcolano i polinomi $L_i(x) = \prod_{j \neq i}(x - x_j) / \prod_{j \neq i}(x_i - x_j)$
- e il polinomio cercato è $p(x) = \sum_i k_i L_i(x)$
- nel caso di uno Schema a soglia, ci interessa solo il termine noto
- basta considerare i $L_i(0)$ (che possono essere pre-calcolati)
- il segreto è $M = \sum_i k_i L_i(0)$
- nell esempio precedente, $L_1(0) = ?, L_2(0) = -3, L_3(0) = 1,$
- il segreto è $0 L_1 + 3(-3) + 7 \cdot 1 \equiv 11 \pmod{13}$

generalizzazioni di uno schema a soglia

- possiamo immaginare la presenza di due gruppi A e B (per esempio, ostili fra loro) e si vuole che il segreto possa essere ricostruito solo con il contributo di entrambi i gruppi
- è facile modificare lo schema di Shamir per affrontare questa situazione
- per esempio, si richiedono almeno tre ombre provenienti dal gruppo A e due dal gruppo B
- si scrive il segreto M come un prodotto $M_A \cdot M_B$ in $\mathbb{Z}_p$
- si generano due polinomi in $\mathbb{Z}_p$; $f_A = a_A x^2 + b_A x + M_A$, $f_B = a_B x + M_B$
- ai membri del gruppo A si danno le ombre ottenute calcolando il valore del polinomio f_A, e a quelli del gruppo B le ombre ottenute calcolando il valore del polinomio f_B
- per ricostruire il segreto è indispensabile la partecipazione di entrambi i gruppi

PKC a chiave multipla

- nell'RSA, la chiave è $(N, p, q, a, b) \mid ab \equiv 1 \pmod{\phi(N)}$
- b è pubblica, e a è privata
- oppure sono entrambe segrete: Alice conosce solo a, Bob conosce solo b (e non conoscono la fattorizzazione di N)
- in questo modo solo Alice e Bob possono comunicare fra loro
- posso pensare a una generalizzazione dell'RSA con più di due chiavi
- $(N, p, q, a_1, a_2, \dots, a_k) \mid a_1 a_2 \dots a_k \equiv 1 \pmod{\phi(N)}$
- si ha sempre che $x^{a_1 a_2 \dots a_k} \equiv x \pmod{N}$
- se per cifrare si usano ad esempio a_1 e a_2: $y = x^{a_1 a_2} \pmod{N}$
- per decifrare bisogna conoscere $a_3, \dots, a_k$
- $y^{a_3 \dots a_k} = x^{a_1 a_2 \dots a_k} \equiv x \pmod{N}$

secret broadcasting

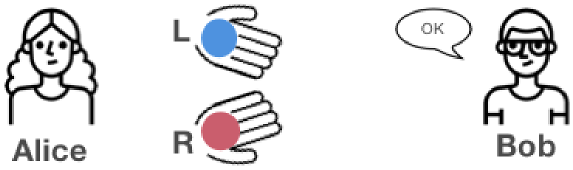
- la PKC a chiave multipla si può usare in uno schema di secret broadcasting (trasmissione/diffusione di un segreto)
- si ha un messaggio che viene trasmesso a n utenti
- ma si vuole che solo un sottoinsieme di k di essi sia in grado di decifrarlo
- questo sottoinsieme cambia a ogni trasmissione

zero-knowledge proofs

- Bob conosce un segreto (per esempio, dato y sa trovare $x = \log_g(y) \pmod{p}$)
- vuole convincere Alice che conosce questo segreto
- senza dare a Alice nessuna informazione su x
- può farlo tramite un protocollo a conoscenza zero

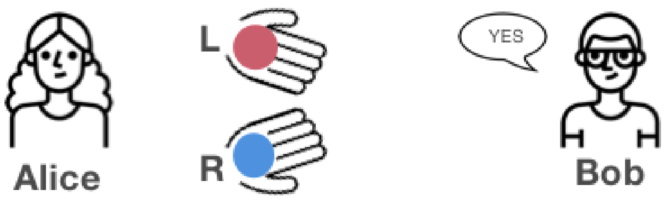
esempio ZKP

- Alice è daltonica, e ha due palline
- Bob sa distinguere la pallina blu da quella rossa
- vuole convincerla di questo
- senza rivelare a Alice qual è la pallina rossa e quale quella blu



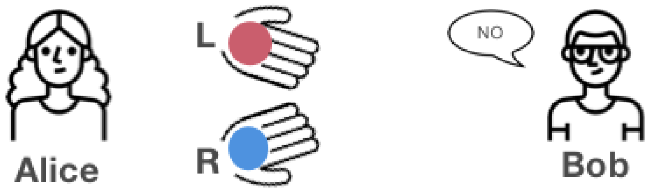
esempio ZKP

- Alice nasconde le palline dietro la schiena
- e tira una moneta
- se viene testa scambia le palline
- se viene croce no



esempio ZKP

- Alice nasconde le palline dietro la schiena
- e tira una moneta
- se viene testa scambia le palline
- se viene croce no



ZKP per il logaritmo discreto

- Bob conosce il DL di y, $x = \log_g(y) \pmod p$
- sceglie un h casuale, calcola $z = g^h$ e manda il risultato a Alice
- Alice tira una moneta: se viene testa, chiede a Bob di rivelare h, se viene croce di rivelare $x + h$
- nel primo caso, Alice controlla che $g^h = z$; nel secondo, che $g^{h+x} = zy$
- dalla conoscenza di $h + x$ non ha informazioni su x
- iterando questo procedimento, si convince che Bob conosce x.

bit commitment

- Alice fa una previsione, ma non vuole rivelarla in anticipo
- Bob non vuole che Alice possa cambiare la previsione “col senno di poi”
- ex -Alice vuole convincere Bob che è brava a prevedere l’andamento del mercato azionario
- Bob non vuole pagare per le previsioni di Alice prima di avere visto se funzionano
- e Alice non vuole dare le sue previsioni senza essere pagata