Crittografia 1 - CR410

Francesca Merola

informazioni

- orario:
  martedì 11:00-13:00 aula F
  giovedì 11:00-13:00 aula C
  venerdì 11:00-13:00 aula F (a settimane alterne)
- ricevimento: su appuntamento email
  (martedì pomeriggio) studio 300
- pagina web:
  http://ricerca.mat.uniroma3.it/users/merola/
- email: `merola@mat.uniroma3.it`

Testi consigliati

- Baldoni, Ciliberto, Piacentini: Aritmetica, crittografia e codici
- D. Stinson: Cryptography - theory and practice
- Languasco, Zaccagnini: Manuale di crittografia
- Katz, Lindell: An introduction to modern cryptography
- B. Schneier: Applied Cryptography

schema del corso

- Introduzione alla crittografia. Cenni storici. Definizione di crittosistema. Cifrari classici. Introduzione alla crittoanalisi.
- Introduzione alla crittografia a chiave pubblica. Cenni di teoria della complessità. Problema dello zaino. Cifrario di Merkle-Hellman.
- Il crittosistema RSA. Test di primalità. Algoritmi di fattorizzazione. Alcuni attacchi all'RSA. Cifrario di Rabin.
- Il problema del logaritmo discreto. Scambio della chiave di Diffie-Hellman. Il crittosistema di Elgamal.
- Firma digitale. Schemi di firma. Lo schema RSA. Lo schema di Elgamal. Cenni su alcuni protocolli crittografici.

crittografia

Crittografia - dal greco
$\kappa\rho\upsilon\pi\tau o\varsigma$, nascosto
$\gamma\rho\alpha\phi\epsilon\iota\nu$, scrivere

crittografia

crittologia

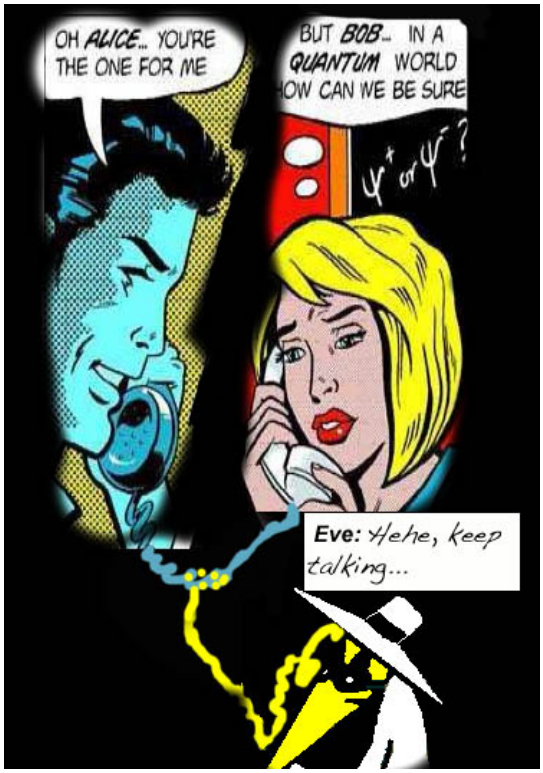
crittoanalisi

- classicamente, crittografia = nascondere il contenuto di un messaggio
- più di recente, molti altri usi:
  - autenticazione di un messaggio/interlocutore
  - scambio di una chiave segreta
  - firma digitale
  - condivisione di un segreto
  - e molto altro

Alice

⇓

Bob



Alice

⇓

← Eve

Bob

atbash - un cifrario a sostituzione

ABCDEFGHIJKLM
ZXYWVUTSRQPON
ciao $\rightarrow$ YRZL

la scitala - un cifrario a trasposizione

crittosistema: definizione

Definizione

Un crittosistema è una quintupla $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$*, dove*

1. $\mathcal{P}$ *è un insieme finito di testi in chiaro (plaintext)*
2. $\mathcal{C}$ *è un insieme finito di testi cifrati (ciphertext)*
3. $\mathcal{K}$ *è un insieme finito di chiavi. (*$\mathcal{K}$ *è detto spazio delle chiavi)*
4. *per ogni* $k \in \mathcal{K}$ *c'è una funzione di cifratura* $e_k \in \mathcal{E}$*,* $e_k : \mathcal{P} \to \mathcal{C}$ *e una funzione di decifratura* $d_k \in \mathcal{D}$*,* $d_k : \mathcal{C} \to \mathcal{P}$ *tali che, per ogni* $x \in \mathcal{P}$ *si ha*

$$d_k(e_k(x)) = x$$

se si ha $x, y \in \mathcal{P}$ con $x \neq y$,
allora dev'essere anche, per ogni chiave k, $e_k(x) \neq e_k(y)$;
le funzioni di cifratura devono essere iniettive.

cifrario additivo (shift cipher)

- $\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathcal{K} = \mathbb{Z}_{26}$;
- fissiamo $0 \leq k \leq 25$; allora
  - $e_k(x) = (x + k) \bmod 26$,
  - $d_k(y) = (y - k) \bmod 26$.

Nota: quando $k = 3$, si ha il cifrario di Cesare.

Identifichiamo $\mathbb{Z}_{26}$ con l'alfabeto:

A	B	C	D	E	F	G	H	I
0	1	2	3	4	5	6	7	8
J	K	L	M	N	O	P	Q	R
9	10	11	12	13	14	15	16	17
S	T	U	V	W	X	Y	Z	
18	19	20	21	22	23	24	25	

esempio

la chiave è $k = 9$

s	a	l	u	t	i	d	a	l	m	a	r	e
18	0	11	20	19	8	3	0	11	12	0	17	4
1	9	20	3	2	17	12	9	20	21	9	0	13
B	J	U	D	C	R	M	J	U	V	J	A	N

Nota: spesso si pensa la chiave come una lettera, non come un numero (in questo esempio la chiave è J).

Proprietà di un buon crittosistema:

- Dev'essere possibile calcolare ogni e_k e d_k in modo "efficiente";
- Eve non deve essere in grado di risalire al testo in chiaro (o peggio, alla chiave) dal testo cifrato.

Per i cifrari additivi, si hanno solamente 26 possibili chiavi!!

esercizio

Provare a decrittare il messaggio

L	E	E	P	Y	E	T	L	W	N	L	Y	P
a	t	t	e	n	t	i	a	l	c	a	n	e

la chiave è 11 (oppure L)

in un crittosistema, bisogna che
$x, y \in \mathcal{P}$, $x \neq y$, $\Rightarrow e_k(x) \neq e_k(y)$; le funzioni di cifratura devono essere iniettive.
$\mathcal{P}$ e $\mathcal{C}$ sono insiemi *finiti*
se in un crittosistema si ha $\mathcal{P} = \mathcal{C}$,
una funzione $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{C} = \mathcal{P}$
è iniettiva $\Leftrightarrow$ è suriettiva $\Leftrightarrow$ è biiettiva
dunque in questo caso le funzioni di cifratura sono permutazioni di $\mathcal{P}$

permutazioni

Se X è un insieme finito con n elementi
un'applicazione biiettiva $\pi : X \to X$ si dice permutazione di X.

Ci sono $n! = n \cdot (n-1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$ permutazioni di X.

L'iniseme delle permutazioni di un insieme con n elementi;
si denota con S_n.

cifrari a sostituzione

$\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathbb{Z}_{26}$
$\mathcal{K}$=$\{$ permutazioni di $\mathbb{Z}_{26}$ $\} = S_{26}$

per ogni $\pi \in \mathcal{K}$, si ha

$$e_\pi(x) = \pi(x), \quad \text{e} \quad d_\pi(y) = \pi^{-1}(y).$$

identificheremo $\mathbb{Z}_{26}$ con l'alfabeto

esempio

sia π la permutazione

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
F	X	H	G	N	O	K	A	U	P	S	V	T
n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
Q	L	M	D	I	R	Y	C	J	E	Z	B	W

allora π^{-1} è

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
h	y	u	q	w	a	d	c	r	v	g	o	p
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
e	f	j	n	s	k	m	i	l	z	b	t	x

c	i	v	e	d	i	a	m	o	p	o	i
H	U	J	N	G	U	F	T	L	M	L	U

Proprietà di un buon crittosistema:

- Dev'essere possibile calcolare ogni e_k e d_k in modo "efficiente";
- Eve non deve essere in grado di risalire alla chiave (o al testo in chiaro) dal testo cifrato.

Per i cifrari additivi, si hanno solamente 26 possibili chiavi!

Nel caso di una sostituzione generica, il numero di chiavi è molto alto

$$|\mathcal{K}| = 26! \approx 4 \cdot 10^{26}.$$

questo non basta a garantire la sicurezza!

cifrari a trasposizione

$\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathbb{Z}_{26}^m$
abbiamo una m-pla di lettere;
$\mathcal{K}$=$\{$ permutazioni di $\{1, 2, \ldots m\}$ $\}$ $= S_m$

per ogni $\pi \in \mathcal{K}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathcal{P}$,
$y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathcal{C}$ si ha

$$e_\pi(x) = (x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m)});$$

$$d_\pi(y) = (y_{\pi^{-1}(1)}, y_{\pi^{-1}(2)}, \ldots, y_{\pi^{-1}(m)});$$

crittoanalisi: principio di Kerckhoffs

L'attaccante, Eve, può conoscere il crittosistema usato da Alice e Bob.
Non conosce la chiave.
Vantaggi:

- è più facile tenere segreta la chiave
- se la sicurezza si basa sulla chiave, e la chiave viene scoperta, basta cambiare chiave
- si può usare lo stesso crittosistema per far comunicare diverse coppie di persone

- oggi il principio di Kerckhoffs viene inteso in maniera più forte: l'algoritmo deve essere pubblico
- un sistema che viene molto studiato (e attaccato) è più sicuro
- meglio che le debolezze, se ci sono, vengano scoperte e rese pubbliche
- se l'algoritmo è pubblico, non c'è rischio di reverse engineering
- si possono stabilire standard

crittoanalisi: tipi di attacco

Ciphertext only attack: L'attaccante conosce una stringa y di testo cifrato. Cerca di risalire al testo in chiaro o alla chiave.

Known plaintext attack: L'attaccante conosce una stringa x di testo in chiaro e il corrispondente testo cifrato y. Cerca di risalire alla chiave o di decrittare altri testi cifrati.

Chosen plaintext attack: L'attaccante ha la possibilità di scegliere un testo in chiaro x e di ottenere il corrispondente testo cifrato. Cerca di risalire alla chiave o di decrittare altri testi cifrati.

Chosen ciphertext attack: L'attaccante ha la possibilità di scegliere un testo cifrato y e di ottenere il corrispondente testo in chiaro x. Cerca di risalire alla chiave.

crittoanalisi di un cifrario a sostituzione

Dobbiamo decrittare il testo

```
QANGH TGMYJ XGHTN AVUNG TTYSH LUXYU OUAUD UQQYJ UJAXX
YNUTY NGKGB BUGMA XASLG KJUGX YQANG HTGMY JXGHT DABBY
VUJAK TYTYT ANGHT JAKTY VUJHS SYOGH TSAOD JUQAD ABBYV
GQGXG SXGVU IHAJJ UQPAV UTMAN TYSUO AXXYT YTAJJ ASXHF
AATAU QGOUT AXXUD ANGQQ ATVAN AUJFH YQYAD ANNUS QGJVG
NAJAS XGTBA TYTSY QYOAG TVGSS AOGUJ FGXXY KJUAQ PAHTL
AJKUY NTYIH ASXYD ABBYV UJAKT YQGDU XYTAJ JGLYX XAKGV
UHTMA QQPUY FGJAK TGOAU JIHGJ AGMAM GTYOA OGSXN GTXYT
UYSAT YTQPA XHXXU JYQPU GOGMG TYOGA SXNYQ UJUAK UGDAN
MUGVA JJGDH TXGVA JSHYT GSYQP AANGS AODNA JHSXN GADGY
TGBBG QYOAH TGQUJ UAKUG OGXHN GGDDA TGOGA SXNYQ UJUAK
UGALL AMUSX YIHAJ DABBY VUJAK TYSUN GJJAK NYXHX XYAVG
```

analisi delle frequenze

frequenze dei caratteri % in italiano

A	B	C	D	E	F	G	H	I
10,41	0,95	4,28	3,82	12,62	0,75	2,01	1,10	11,62
J	K	L	M	N	O	P	Q	R
0	0	6,61	2,58	6,49	8,71	3,20	0,75	6,70
S	T	U	V	W	X	Y	Z	
6,04	6,06	3,04	1,51	0	0	0	0,93	

analisi delle frequenze

frequenze dei caratteri % nel nostro testo

A	B	C	D	E	F	G	H	I
13,52	2,41	0	2,78	0	0,74	11,30	4,26	0,74
J	K	L	M	N	O	P	Q	R
6,85	2,59	1,11	1,85	4,44	2,96	1,11	4,44	0
S	T	U	V	W	X	Y	Z	
4,44	7,78	8,52	2,78	0	6,48	8,89	0	

proviamo A=e

```
QeNGH TGMYJ XGHTN eVUNG TTYSH LUXYU OUeUD UQQYJ UJeXX
YNUTY NGKGB BUGMe XeSLG KJUGX YQeNG HTGMY JXGHT DeBBY
VUJeK TYTYT eNGHT JeKTY VUJHS SYOGH TSeOD JUQeD eBBYV
GQGXG SXGVU IHeJJ UQPeV UTMeN TYSUO eXXYT YTeJJ eSXHF
eeTeU QGOUT eXXUD eNGQQ eTVeN eUJFH YQYeD eNNUS QGJVG
NeJeS XGTBe TYTSY QYOeG TVGSS eOGUJ FGXXY KJUeQ PeHTL
eJKUY NTYIH eSXYD eBBYV UJeKT YQGDU XYTeJ JGLYX XeKGV
UHTMe QQPUY FGJeK TGOeU JIHGJ eGMeM GTYOe OGSXN GTXYT
UYSeT YTQPe XHXXU JYQPU GOGMG TYOGe SXNYQ UJUeK UGDeN
MUGVe JJGDH TXGVe JSHYT GSYQP eeNGS eODNe JHSXN GeDGY
TGBBG QYOeH TGQUJ UeKUG OGXHN GGDDe TGOGe SXNYQ UJUeK
UGeLL eMUSX YIHeJ DeBBY VUJeK TYSUN GJJeK NYXHX XYeVG
```

Digrammi frequenti in italiano (nell'ordine):

er, es, on, re, el, en, de, di, si, ti, la, al
Nel nostro testo:

AN (9), YT (9), AJ (6), VU (5).
(le nostre vocali sono probabilmente G, U, Y)
G=a, N=r, ?? Y=o, T=n, U=i ??.

```
QeraH naMoJ XaHnr eVira nnoSH LiXoi OieiD iQQoJ iJeXX
orino raKaB BiaMe XeSLa KJiaX oQera HnaMo JXaHn DeBBo
ViJeK nonon eraHn JeKno ViJHS SoOaH nSeOD JiQeD eBBoV
aQaXa SXaVi IHeJJ iQPeV inMer noSiO eXXon oneJJ eSXHF
eenei QaOin eXXiD eraQQ enVer eiJFH oQoeD erriS QaJVa
reJeS XanBe nonSo QoOea nVaSS eOaiJ FaXXo KJieQ PeHnL
eJKio rnoIH eSXoD eBBoV iJeKn oQaDi XoneJ JaLoX XeKaV
iHnMe QQPio FaJeK naOei JIHaJ eaMeM anoOe OaSXr anXon
ioSen onQPe XHXXi JoQPi aOaMa noOae SXroQ iJieK iaDer
MiaVe JJaDH nXaVe JSHon aSoQP eeraS eODre JHSXr aeDao
naBBa QoOeH naQiJ ieKia OaXHr aaDDe naOae SXroQ iJieK
iaeLL eMiSX oIHeJ DeBBo ViJeK noSir aJJeK roXHX XoeVa
```

```
QeraH naMoJ XaHnr eVira nnoSH LiXoi OieiD iQQoJ iJeXX
orino raKaB BiaMe XeSLa KJiaX oQera HnaMo JXaHn DeBBo
ViJeK nonon eraHn JeKno ViJHS SoOaH nSeOD JiQeD eBBoV
aQaXa SXaVi IHeJJ iQPeV inMer noSiO eXXon oneJJ eSXHF
eenei QaOin eXXiD eraQQ enVer eiJFH oQoeD erriS QaJVa
reJeS XanBe nonSo QoOea nVaSS eOaiJ FaXXo KJieQ PeHnL
eJKio rnoIH eSXoD eBBoV iJeKn oQaDi XoneJ JaLoX XeKaV
iHnMe QQPio FaJeK naOei JIHaJ eaMeM anoOe OaSXr anXon
ioSen onQPe XHXXi JoQPi aOaMa noOae SXroQ iJieK iaDer
MiaVe JJaDH nXaVe JSHon aSoQP eeraS eODre JHSXr aeDao
naBBa QoOeH naQiJ ieKia OaXHr aaDDe naOae SXroQ iJieK
iaeLL eMiSX oIHeJ DeBBo ViJeK noSir aJJeK roXHX XoeVa
```

X=t

```
QeraH naMoJ taHnr eVira nnoSH Litoi OieiD iQQoJ iJett
orino raKaB BiaMe teSLa KJiat oQera HnaMo JtaHn DeBBo
ViJeK nonon eraHn JeKno ViJHS SoOaH nSeOD JiQeD eBBoV
aQata StaVi IHeJJ iQPeV inMer noSim etton oneJJ eStHF
eenei QaOin ettiD eraQQ enVer eiJFH oQoeD erriS QaJVa
reJeS tanBe nonSo QoOea nVaSS eOaiJ Fatto KJieQ PeHnL
eJKio rnoIH eStoD eBBoV iJeKn oQaDi toneJ JaLot teKaV
iHnMe QQPio FaJeK naOei JIHaJ eaMeM anoOe maStr anton
ioSen onQPe tHtti JoQPi aOaMa noOae StroQ iJieK iaDer
MiaVe JJaDH ntaVe JSHon aSoQP eeraS eODre JHStr aeDao
naBBa QoOeH naQiJ ieKia OatHr aaDDe naOae StroQ iJieK
iaeLL eMiSt oIHeJ DeBBo ViJeK noSir aJJeK rotHt toeVa
```

```
                                  aMeM anoOe OaStr anton
ioSen onQPe tHtti JoQPi aOaMa noOae StroQ iJieK iaDer
```

M=v, S=s, O=m.....

la sostituzione è

```
a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z
G L Q V A F K P U - - J O T Y D I N S X H M - - - B
```

il testo in chiaro è:

```
cerau navol taunr edira nnosu bitoi mieip iccol ilett
orino ragaz ziave tesba gliat ocera unavo ltaun pezzo
dileg nonon eraun legno dilus somau nsemp licep ezzod
acata stadi quell iched inver nosim etton onell estuf
eenei camin ettip eracc ender eilfu ocoep erris calda
reles tanze nonso comea ndass email fatto gliec heunb
elgio rnoqu estop ezzod ilegn ocapi tonel labot tegad
iunve cchio faleg namei lqual eavev anome mastr anton
iosen onche tutti lochi amava nomae stroc ilieg iaper
viade llapu ntade lsuon asoch eeras empre lustr aepao
nazza comeu nacil iegia matur aappe namae stroc ilieg
iaebb evist oquel pezzo dileg nosir alleg rotut toeda
```