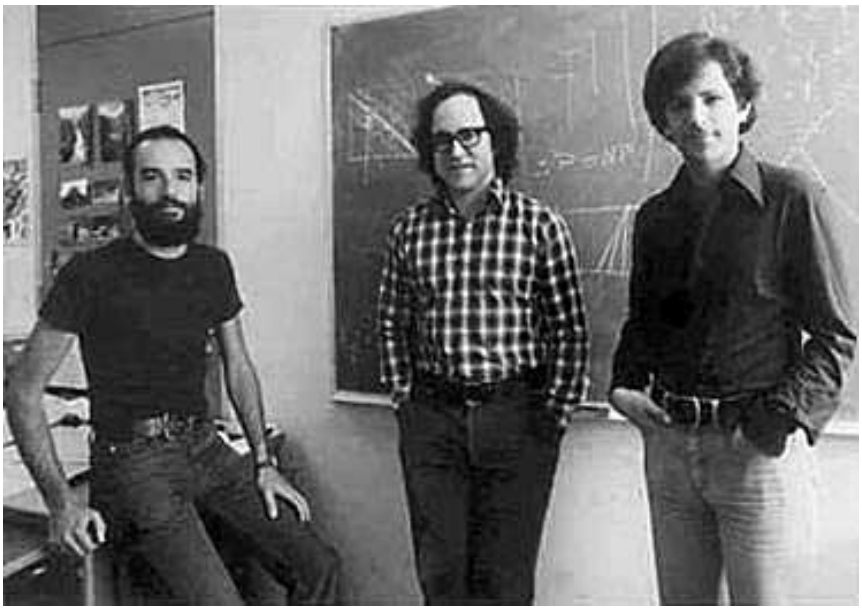
una possibile funzione unidirezionale

- moltiplicare due interi a n bit è facile (in $\mathcal{O}(n^2)$ con l'algoritmo usuale)
- trovare un primo a n bit, e verificare che è primo, è facile (vedremo poi)
- fattorizzare un numero a n bit è difficile ($2^{cn^{1/3}}$)
- si può costruire un crittosistema a chiave pubblica basato su questa osservazione?

il CS a chiave pubblica RSA - 1978



Shamir, Rivest, Adelman

crittosistema RSA

- Sia $N = pq$, p, q primi. Sia $\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathbb{Z}_N$.
- Lo spazio delle chiavi è

$$\mathcal{K} = \{(N, p, q, d, e) \mid de \equiv 1 \pmod{\phi(N)}\}.$$

- Se $k = (N, p, q, d, e)$ è una chiave, poniamo
- $e_k(x) = x^e \pmod N$
- N e e sono la chiave pubblica
- $d_k(y) = y^d \pmod N$
- p, q, d sono la chiave privata

cifratura e decifratura

$e_k(x) = x^e \pmod N$, $d_k(y) = y^d \pmod N$

- verifichiamo che $d_k(e_k(x)) = x$
- $ed \equiv 1 \pmod{\phi(N)}$, quindi $ed = 1 + k\phi(N)$
- se $(x, N) = 1$, allora

$$\begin{aligned} (x^e)^d &= x^{1+k\phi(N)} \\ &= (x^{\phi(N)})^k x \\ \text{Eulero} \qquad &\equiv 1^k x \pmod N \\ &\equiv x \pmod N \end{aligned}$$

- se $x \notin U(\mathbb{Z}_N)$, vale il corollario già visto (N è il prodotto di due primi)

quindi la funzione di cifratura è iniettiva

implementazione dell'RSA

- Bob genera casualmente due primi "grandi", p e q, con $p \neq q$
- calcola $N = p \cdot q$ e $\phi(N) = (p-1) \cdot (q-1) = pq - (p+q) + 1$
- genera (in maniera non necessariamente casuale) un esponente e con $1 < e < \phi(N)$, tale che $(e, \phi(N)) = 1$
- calcola $d = e^{-1} \pmod{\phi(N)}$
- la chiave pubblica è (N, e), quella privata è (p, q, d)

un esempio

- Bob sceglie $p = 17$ e $q = 11$
- $N = 187$ e $\phi(N) = 16 \cdot 10 = 160$ $(= 2^5 5)$
- Bob sceglie $e = 7$; allora $d = e^{-1} = 23 \pmod{160}$; pubblica la chiave $N = 187$ e $e = 7$
- Alice vuole cifrare il testo in chiaro 88 da mandare a Bob
- calcola $88^7 = 11 \pmod{187}$ e lo invia a Bob
- Bob riceve 11; per decifrare, calcola $11^{23} \pmod{187}$, e ritrova 88

Problemi facili (polinomiali)

1. dato un intero N, vedere se è primo (vedremo poi)
2. dati e e M, trovare (e, M); se è 1, calcolare l'inverso di e modulo M (alg. di Euclide – polinomiale)
3. calcolare la f.ne $x \to x^e \pmod N$ (alg. square & multiply – polinomiale)

Problemi difficili

4. dato un intero N, fattorizzarlo
5. dato un intero N, calcolare $\phi(N)$
6. dati N e e, trovare d tale che $(x^e)^d = x \pmod N$

Problemi facili

1. dato un intero N, vedere se è primo (test di primalità)
2. dati c e M, trovare (c, M); se è 1, calcolare l'inverso di c modulo M (alg. di Euclide – polinomiale)
3. calcolare la f.ne $x \to x^e \pmod N$ (square and multiply)

- Se Eve riesce a fattorizzare $N = pq$, ottiene le info private di Bob
- dunque violare l'RSA non può essere più difficile che fattorizzare
- conoscere la fattorizzazione $\iff$ calcolare $\phi(N)$:
  - $\Rightarrow$ ovvio
  - $\Leftarrow$ conoscere N $(= pq)$ e $\phi(N)$ $(= (p-1)(q-1) = N - (p+q) + 1)$ vuol dire conoscere la somma $(N - \phi(N) + 1)$ e il prodotto (N) di p,q – quindi conoscere p e q
- se Eve risolve 6, dati N e e, trova d tale che $(x^e)^d = x \pmod N$
- (Miller) ho buone probabilità di riuscire a fattorizzare N (vedremo poi)
- i problemi difficili sono tra loro equivalenti

problemi "facili" - primalità

- ci sono infiniti numeri primi (Euclide)
- la dimostrazione è per assurdo (è la più celebre dimostrazione per assurdo): supponiamo ci siano solo un numero finito di primi, e siano questi $p_1, p_2, \ldots, p_k$
- consideriamo il numero $p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_k + 1$
- questo numero non è divisibile per nessuno dei $p_1, p_2, \ldots p_k$ – e allora quali sono i suoi fattori primi?
- ci sono infiniti primi – quanti sono i numeri primi che precedono un dato intero x?

teorema dei numeri primi

- $\pi(x)$ = numero di primi p con $p \leq x$
- esempio: $\pi(30) = 4 + 4 + 2 = 10$
- teorema dei numeri primi: $lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log(x)}} = 1$
  (quindi asintoticamente, $\pi(x) \approx \frac{x}{\log(x)}$)
- congetturato da Legendre, poi da Gauss (nel 1792 - a quindici anni!)
- dimostrato da Hadamard, de la Vallée Poussin verso fine 800 (importante contributo di Chebyshev $\sim$ 1850)

x	10^3	10^6	10^9
$\pi(x)$	168	78.498	50.847.478
$[x/(\log x)]$	145	72.382	48.254.942
$[\pi(x)(\log x)/x]$	1,159 ...	1,084 ...	1,053 ...

teorema dei numeri primi - interpretazione probabilistica

- dato un intero positivo N, la probabilità che un numero $< N$ scelto a caso sia primo è $\pi(N)/N$
- per N molto grande $\approx 1/\log(N)$
- esempio: la probablità che un numero casuale con al più 100 cifre decimali sia primo è $\approx 1/\log(10^{100}) \approx 1/230$
- possiamo scartare i numeri pari (che sono $1/2$) e i multipli di 3 (che sono $1/3$): possiamo scartare $2/3 = 1/2 + 1/6$. La probabilità di trovare un primo diventa $\approx 1/77$.
- se sappiamo controllare se un intero è primo, trovare primi grandi è facile