logaritmo discreto

- sia G un gruppo ciclico di ordine n, sia g un generatore di G
- dato $y \neq 1 \in G$
- bisogna determinare l'unico intero x con $1 \leq x \leq n-1$ tale che

$$g^x = y$$

- ex: in $U(\mathbb{Z}_9)$ con $g = 2$, se $y = 7$ si ha $x = 4$, perché $2^4 = 7$.
- l'intero x si chiama il logaritmo discreto di y in base g, e si denota con $\log_g y$
- ex: in $U(\mathbb{Z}_9)$, $4 = \log_2 7$

logaritmo discreto come funzione unidirezionale

- in generale, lavoreremo con il gruppo $\mathbb{Z}_p^*$ o più in generale con $\mathbb{F}_q^*$, $q = p^m$, p primo
- dati g generatore di $\mathbb{Z}_p^*$ e x tale che $1 \leq x \leq p-1$, calcolare $y = g^x$ è computazionalmente facile
- ($y \equiv g^x \pmod{p}$ – si usa l'algoritmo square-and-multiply)
- si ritiene che, dati g generatore di $\mathbb{Z}_p^*$ e $y \in \mathbb{Z}_p^*$, determinare $x = \log_g y$ sia difficile (sotto opportune ipotesi su p)
- in particolare, p devessere grande (2048 bit), $p \approx 2^{2047}$
- dati g e y posso trovare x tale che $g^x = y$ per tentativi – calcolando g^x per tutti gli x, $1 \leq x \leq p-1$
- ma il numero di tentativi è enorme

cifratura RSA e logaritmo discreto

- nella cifratura RSA, la funzione è del tipo

$$x \longrightarrow x^e \pmod{N}$$

- nel problema del logaritmo discreto, la funzione è del tipo

$$x \longrightarrow g^x \pmod{p}$$

protocollo di scambio della chiave

- Alice e Bob non condividono informazioni segrete
- eseguono un protocollo, e alla fine hanno la stessa chiave
- Eve ascolta la comunicazione, ma non ottiene nessuna informazione sulla chiave

scambio della chiave di Diffie-Hellman

- Alice e Bob scelgono pubblicamente un primo p e un elemento primitivo $g \pmod{p}$
- Alice sceglie casualmente $a \in \{2, \ldots, p-2\}$; calcola $g^a \bmod p$ e invia il risultato a Bob
- Bob sceglie casualmente $b \in \{2, \ldots, p-2\}$; calcola $g^b \bmod p$ e invia il risultato a Alice
- Alice calcola $(g^b)^a \bmod p$
- Bob calcola $(g^a)^b \bmod p$
- la chiave è $k = g^{ab}$

- Esempio: $p = 23$, $g = 5$
- Alice sceglie $a = 6$ $g^a = 5^6 \equiv 8 \bmod 23$
- Bob sceglie $b = 15$ $g^b = 5^{15} \equiv 19 \bmod 23$ e
- Alice calcola $(g^b)^a = 19^6 \equiv 2 \bmod 23$
- Bob calcola $(g^a)^b = 8^{15} \equiv 2 \bmod 23$

DH problem

- se Eve sa risolvere il problema del logaritmo discreto, sa ricavare la chiave comune di Bob e Alice
- dall'osservazione di g^a, g^b mod p ricava a e b, quindi calcola $k = g^{ab}$
- DH problem: dato un gruppo ciclico G, g un generatore e dati g^a, g^b trovare g^{ab}
- basta che sappia risolvere il DH problem per trovare la chiave
- equivalenza DH - DL?

- per implementare il protocollo, bisogna essere in grado di produrre numeri primi grandi
- e dato un tale primo p, di trovare una radice primitiva g modulo p
- sicurezza: p almeno 2048 bit, $p-1$ con un fattore primo grande
- si cerca anche un $p-1$ a fattorizzazione nota (per trovare facilmente g)
- spesso si sceglie $p = 2q+1$, q un primo
- osservazione: la funzione unidirezionale $x \to g^x \pmod p$ non ha una trapdoor

crittosistema Elgamal (ca 1985)

- sia p un primo, g un elemento primitivo mod p
- $\mathcal{P} = \mathbb{Z}_p^*$
- $\mathcal{C} = \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p^*$
- Lo spazio delle chiavi è

$$\mathcal{K} = \{(p, g, a, \beta) \mid \beta \equiv g^a \pmod{p}\}.$$

- p, g e β sono la chiave pubblica – a è la chiave privata

crittosistema Elgamal

- prima di cifrare il messaggio $x \in \mathcal{P}$, Alice sceglie un numero casuale (segreto) $h \in \{2, \ldots, p-2\}$
- $e_k(x, h) = (y_1, y_2)$
- con $y_1 = g^h$, $y_2 = x\beta^h \pmod{p}$
- Bob riceve $(y_1, y_2) \in \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p^*$ – non conosce h ma conosce a
- calcola $y_1^a = (g^h)^a = (g^a)^h = \beta^h \pmod{p}$
- calcola $(\beta^h)^{-1} \pmod{p}$ e ottiene $x = y_2(\beta^h)^{-1}$
- $d_k((y_1, y_2)) = y_2(y_1^a)^{-1} \pmod{p}$
- notare la somiglianza con DH – non si inverte la funzione $x \to g^x \pmod{p}$
- Alice sceglie un nuovo h a ogni trasmissione (randomized encryption)

esempio

- Bob sceglie $p = 83$, $g = 2$ e la chiave privata $a = 30$
- $\beta = 2^{30} \equiv 40 \bmod 83$
- la chiave pubblica di Bob è $(83, 2, 40)$
- il messaggio di Alice è $x = 54$ – il numero scelto per la cifratura è $h = 13$
- Alice invia $(g^h, x\beta^h) = (2^{13}, 54 \cdot 40^{13}) \equiv (58, 71) \bmod 83$
- per decifrare, Bob calcola $(g^h)^a = 58^{30} = 9$
- l'inverso di 9 mod 83 è 37 – il messaggio è quindi $37 \cdot 71 = 54 \bmod 83$

- la "cifratura" è una moltiplicazione: $x \to xg^{ha}$
  - si può invece usare un cifrario a blocchi (AES) e cifrare $x \to e_{g^{ha}}(x)$
- anche per Elgamal, si usa p di almeno 2048 bit, $p - 1$ con un fattore primo grande e a fattorizzazione nota
- anche per violare Elgamal, basta che Eve sappia risolvere il DH problem
- se dati g^h e $\beta = g^a$ sa trovare $g^{ah} = \beta^h$, può leggere il messaggio
- se Eve sa risolvere il logaritmo discreto può ricavare l'esponente h e quindi ricavare direttamente x
- oppure ricavare a e decifrare come Alice (conviene – h cambia in ogni trasmissione)

in un gruppo ciclico arbitrario

- sia lo scambio della chiave di Diffie-Hellman che il crittosistema di Elgamal possono essere implementati utilizzando un gruppo ciclico arbitrario
- per esempio, il gruppo moltiplicativo di un campo finito, $\mathbb{F}^*_{p^m}$, in particolare con $p = 2$
- o il gruppo di una curva ellittica su un campo finito (un suo sottogruppo ciclico

scambio della chiave

- G un gruppo ciclico di ordine n moltiplicativo, g un generatore
- in DH Alice e Bob scelgono interi a e b fra 2 e $n-1$
- Alice sceglie casualmente $a \in \{2, \ldots, n-1\}$; calcola g^a e invia il risultato a Bob
- Bob sceglie casualmente $b \in \{2, \ldots, n-1\}$; calcola g^b e invia il risultato a Alice
- Alice calcola $(g^b)^a$
- Bob calcola $(g^a)^b$ - tutte operazioni in G
- la chiave è $k = g^{ab}$

crittosistema Elgamal

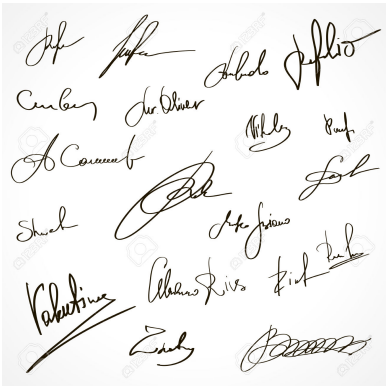
- G un gruppo ciclico di ordine n moltiplicativo, g un generatore
- $\mathcal{P} = G$; $\mathcal{C} = G \times G$
- Lo spazio delle chiavi è $\mathcal{K} = \{(G, g, a, \beta) \mid \beta = g^a)\}$.
- G, g e β sono la chiave pubblica – a è la chiave privata
- prima di cifrare il messaggio $x \in G$, Alice sceglie un numero casuale (segreto) $h \in \{2, \ldots, n-1\}$
- $e_k(x, h) = (y_1, y_2)$
- con $y_1 = g^h$, $y_2 = x\beta^h$
- Bob riceve $(y_1, y_2) \in G \times G$ – non conosce h ma conosce a
- calcola $y_1^a = (g^h)^a = (g^a)^h = \beta^h$
- calcola $(\beta^h)^{-1}$ e ottiene $x = y_2(\beta^h)^{-1}$
- $d_k((y_1, y_2)) = y_2(y_1^a)^{-1}$
- Alice sceglie un nuovo h a ogni trasmissione (randomized encryption)

da chi proviene un messaggio?

- in un crittosistema simmetrico solo Alice e Bob conoscono la chiave
- se Bob riceve un messaggio di Alice e la decifratura del messaggio ha senso, il messaggio proviene certamente da Alice
- in un crittosistema a chiave pubblica, chiunque può scrivere un messaggio cifrato a Bob affermando di essere Alice
- serve una firma digitale

firma “manuale”

- associa un documento a un utente firmatario
- la firma fa fisicamente parte del documento
- la firma viene verificata confrontandola con una firma campione depositata
- dovrebbe essere difficile da falsificare
- è vincolante dal punto di vista legale (contratti etc.)



firma digitale - differenze

- deve sempre associare un utente a un documento - tramite una stringa digitale
- c’è bisogno di un metodo che leghi la firma al documento
- ci vuole un algoritmo pubblico di verifica – previene la falsificazione
- una copia di un documento digitale è uguale all’originale – bisogna evitare che una firma sia riutilizzabile

signature scheme

- Alice firma un messaggio da mandare a Bob
- ci sono due componenti: un algoritmo sig per firmare e un algoritmo ver per verificare
- quello per firmare dev'essere privato (solo Alice può firmare)
- quello per verificare dev'essere pubblico (Bob - e chiunque altro - può verificare che viene da Alice)
- per firmare il messaggio x Alice usa l'alg sig_k che dipende da una chiave k, e calcola $\text{sig}_k(x) = y$ (lo stesso messaggio può avere diverse firme)
- data una coppia (x, y) dove x è il messaggio e y la firma, l'algoritmo $\text{ver}_k(x, y)$ dà in output vero se y è una firma valida di x, falso altrimenti
- in questo momento, non si chiede che (x, y) sia cifrato