Geometria e Combinatoria
Esercitazione

1. L'applicazione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$f(x) = \frac{3x^3 - 2}{7}$$

è iniettiva? È suriettiva? Se è possibile, calcolare f^{-1}.

Sol: f è iniettiva: $f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{3x^3-2}{7} = \frac{3y^3-2}{7} \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$. f è suriettiva: ponendo $y = \frac{3y^3-2}{7}$ e risolvendo si ha $x = \sqrt[3]{\frac{7y+2}{3}}$. L'inversa è $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{7x+2}{3}}$

2. Siano $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $g(x) = 3x + 2$ e $h(x) = x - 7$ Calcolare $g \circ h$ e $(h \circ g)^{-1}$.

Sol: $g \circ h = 3x - 19$; $(h \circ g)^{-1} = 3x + 5$.

3. Siano, f, g, h le seguenti permutazioni di S_5; calcolare $f \circ g^{-1} \circ h^2$.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sol:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Risolvere, se è possibile, la congruenza lineare $10x \equiv 6 \pmod{12}$. Quante e quali soluzioni fra di loro non congrue modulo 12 ha tale congruenza?

Sol: La congruenza ha $2 = (12, 10)$ soluzioni, che sono $x_0 = 3 + 12k$ e $x_1 = 9 + 12k$.

5. Siano $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 \leq x \leq 15\}$, $B = 3\mathbb{Z}$, $C = 4\mathbb{Z}$. Quanti elementi ha l'insieme delle parti dell'insieme

$$A \setminus (B \cup C)?$$

Sol: $2^5 = 32$.

6. Quante parole di tre lettere si possono formare con le lettere della parola LAMA?

   Sol: $\binom{3}{2} \cdot 2$ (la A compare due volte) $+ 3 \cdot 2$ (una sola A) $= 12$

7. In quanti modi posso scegliere una squadra di 4 persone, una della quali è il caposquadra, potendo scegliere fra 8 persone?

   Sol: $\binom{8}{4} \cdot 4 = 8 \cdot \binom{7}{3} = 280$.

8. Determinare l'insieme degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{16}$. Determinare, se se esiste, in $\mathbb{Z}_{16}$ l'inverso di $\overline{7}$.

   Sol: $U(\mathbb{Z}_{16}) = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{15}\}$; $\overline{7}^{-1} = \overline{7}$.

9. Risolvere, se è possibile, il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod 7 \\ x \equiv 6 \pmod 8 \end{cases}$$

   Sol: $x = 46 + 56k$.

10. Calcolare $2^{72} \pmod 5$. (il risultato dev'essere un numero compreso fra 0 e 4).

    Sol: Per il piccolo teorema di Fermat si ha $2^{72} \equiv 1 \pmod 5$

11. Dimostrare che, se $\mathbb{Z}_m$ è un campo, allora m è primo.

    Sol. Mostriamo che se m non 'e primo allora $\mathbb{Z}_m$ non è un campo (le due cose sono equivalenti). Se m non è primo allora possiamo scrivere $m = a \cdot b$ con $1 < a, b < m$. Allora nè $\overline{a}$ nè $\overline{b}$ sono in $U(\mathbb{Z}_m)$, quindi $U(\mathbb{Z}_m) \neq \mathbb{Z}_m^*$, e dunque $\mathbb{Z}_m$ non è un campo.

12. Scrivere la tavola di verità di $(p \to q) \leftrightarrow ((p \wedge (\neg q)) \to (\neg p))$.

    Sol: La proposizione è una tautologia (risulta sempre vera, per ogni valore di verità di p e q.

13. Quali dei seguenti sottoinsiemi di $(U(\mathbb{Z}_{27}), \cdot)$ è un sottogruppo? (attenzione, la risposta giusta non è necessariamente una sola).

$\{1, 2, 4, 8, 16\}$	☐
$\{1, 26\}$	☒
$\{1, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$	☐
$\{1, 10, 19\}$	☒

14. Per quali dei seguenti valori di n esiste un campo con n elementi? (attenzione, la risposta giusta non è necessariamente una sola).

$n = 26$	$\square$	$n = 27$	$\boxtimes$	$n = 28$	$\square$
$n = 29$	$\boxtimes$	$n = 30$	$\square$	$n = 31$	$\boxtimes$
$n = 32$	$\boxtimes$	$n = 33$	$\square$	$n = 34$	$\square$

15. Esiste un grafo con 7 vertici in cui ogni vertice ha grado 3? Se sì, disegnate un esempio, se no, dimostrate la non esistenza.

    Sol: Un tale grafo non esiste - la somma dei gradi deve essere un numero pari (e uguale a due volte il numero degli spigoli), e in un grafo come sopra la somma dei gradi sarebbe 21 che è dispari.

16. Trovare, se è possibile, soluzioni intere per l'equazione

$$12x + 20y = 8.$$

    Sol: Una soluzione intera è per esempio $(x, y) = (-1, 1)$.