Geometria e Combinatoria **18/2/2016**

Cognome e nome:
Numero di matricola:

- **NON potete utilizzare libri / appunti / calcolatrice**
- **scrivete SOLO le soluzioni, non il procedimento né i conti, e consegnate SOLO questo foglio**
- **nelle domande a risposta multipla ("con le crocette") la risposta giusta può essere una o più di una (potreste dover mettere più di una crocetta).**

---

1. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, se ne esistono, il sistema non ammette soluzioni?

$$\begin{cases} x - y + w = 1 \\ 2x + y + z + 3w = -2 \\ ky + 3z + 3w = 1 \end{cases}.$$

Sol. Per $k = 9$.

Trovare le soluzioni del sistema per $k = 3$.

Sol. $\{(-\frac{7}{6} - t, -\frac{13}{6}, \frac{5}{2} - t, t), \quad t \in \mathbb{R}\}$

2. Trovare una base ortogonale e la dimensione del sottospazio $S = \{(x, y, z, w) \,|\, 2x+y-z-w = 0,\ x-4w = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$; trovare una base e la dimensione dei sottospazi $T = \{(x, y, z, w) \mid x - 2y + z = 0\}$ e $S \cap T$ di $\mathbb{R}^4$.

Sol. $\dim S = 2, \quad \mathcal{B}_S = \{(0, 1, 1, 0), (4, -7/2, 7/2, 1)\}$
$\dim T = 3, \quad \mathcal{B}_S = \{(2, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0)\}$
$\dim(S \cap T) = 1, \quad \mathcal{B}_{S\cap T} = \{(4, 11, 18, 1)\}$

3. Per quali $k \in \mathbb{R}$ è invertibile la matrice A? Fissato un valore di k (specificare esplicitamente quale), determinare A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & k & 3 \end{pmatrix}.$$

Sol. A è invertible per $k \neq 9$. Scelto $k = 0$, si ha

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/3 \\ -2 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Quante e quali soluzioni fra di loro non congrue modulo 33 ha la congruenza lineare

$$24x \equiv 18 \pmod{33}?$$

Sol. Tre soluzioni non congrue modulo 33. Sono per esempio $x_1 = 9, x_2 = 20, x_3 = 31$.

5.Siano A, B due insiemi con $|A| = n$, $|B| = m$ e $m > n$. Quali affermazioni sono sicuramente vere?

Esiste almeno una funzione iniettiva con dominio A e codominio B. ☒
Esiste almeno una funzione suriettiva con dominio A e codominio B. ☐
Ci sono esattamente m^n funzioni con dominio A e codominio B. ☒
Ci sono esattamente n^m funzioni con dominio A e codominio B. ☐

6. Sia A una matrice $n \times n$, e sia $\det A = 0$. Quali affermazioni sono sicuramente vere?

A non è invertibile ☒
Il sistema $AX = B$ possiede infinite soluzioni ☐
$\mathrm{rg}A = n - 1$ ☐
l'applicazione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(v) = Av$, è iniettiva ☐
A ammette 0 come autovalore ☒
le colonne di A sono dipendenti ☒

7. Determinare, al variare di $k \in R$, una base e la dimensione per il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f((x, y, z)) = (x - y,\ 2x + y + z,\ ky + 3z)$.

Sol.

Per $k \neq 9$ si ha $\dim Im(f) = 3$, $\mathcal{B}_{Im(f)} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, $\dim Ker(f) = 0$, $\mathcal{B}_{Ker(f)} = \emptyset$.

Per $k = 9$ si ha $\dim Im(f) = 2$, $\mathcal{B}_{Im(f)} = \{(1, 2, 0), (0, 1, 3)\}$, $\dim Ker(f) = 1$, $\mathcal{B}_{Ker(f)} = \{(1, 1, -3)\}$.

8. Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; determinare gli autovalori e gli autospazi di A e stabilire se A è diagonalizzabile.

Sol.

Gli autovalori sono $0, 5, 5$. Si ha $V_0 = \{(-z, 2z, z) \quad z \in \mathbb{R}\}$, $V_5 = \{(x, 0, 0) \quad x \in \mathbb{R}\}$. Per l'autovalore 5 si ha $m_a(5) = 2 \neq m_g(5) = 1$, e la matrice non è quindi diagonalizzabile.

9. Quanti sottoinsiemi di 9 elementi ha un insieme di 12 elementi?

Sol.
$\binom{12}{9} = \binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$

10. Scrivere la tavola di verità della proposizione $((p \wedge q) \leftrightarrow q) \to ((p \wedge (\neg q)) \to p)$.

Sol.

p	q	$((p \wedge q) \leftrightarrow q) \to ((p \wedge (\neg q)) \to p)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V