

Cognome e nome:

Numero di matricola:

- **NON** potete utilizzare libri / appunti / calcolatrice
- nelle domande a risposta multipla (“con le crocette”) la risposta giusta può essere una o più di una (potreste dover mettere più di una crocetta).

1. Siano f, g, h le seguenti permutazioni di S_6 ; calcolare $f^{-1} \circ g^3 \circ h^{-1}$.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 6 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

SOL:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Risolvere il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{11} \\ x \equiv -3 \pmod{12} \end{cases}$$

SOL:

$$x \equiv 93 \pmod{132}$$

3. Enunciare il teorema di Eulero-Fermat. Calcolare

$$5^{321} \pmod{7}$$

(la risposta dev'essere un numero compreso fra 0 e 6).

SOL: Siano $n, a \in \mathbb{Z}$ con $n \neq 1$ e $(a, n) = 1$. Allora

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Nell'esercizio, $n = 7$ e $\varphi(7) = 6$. Si ha $321 = 6 \cdot 53 + 3$, quindi

$$5^{321} = 5^{6 \cdot 53 + 3} = 5^{6 \cdot 53} \cdot 5^3 \equiv 1 \cdot 5^3 \equiv 6 \pmod{7}.$$

4. Dare la definizione di relazione d'ordine.

Quali fra le seguenti relazioni R sono relazioni d'ordine sull'insieme A ?

A è l'insieme dei punti del piano della geometria euclidea, xRy se e solo se $\overline{xy} \leq 1$ (dove $\overline{xy}$ è la distanza tra x e y); ☐

$A = \mathcal{P}(B)$, B un insieme, xRy se e solo se $x \subseteq y$; ☒

$A = \mathcal{P}(B)$, B un insieme, xRy se e solo se $|x| = |y|$; ☐

A è l'insieme dei divisori positivi di un intero positivo n , xRy se e solo se $x|y$. ☒

CONTINUA SUL RETRO!

5. Scrivere la tavola di verità di $((\neg p) \vee q) \rightarrow r) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (r \vee \neg q))$.

SOL:

p	q	r	$((\neg p) \vee q) \rightarrow r) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (r \vee \neg q))$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

6. Quante parole di quattro lettere (anche prive di significato) si possono formare con le lettere della parola SOPRANO?

SOL:

Senza ripetizioni si hanno $D(6,4)=360$ parole.

Le parole con 2 O sono in numero di $\binom{4}{2}D(5,2) = 120$. In totale si hanno 480 parole.

7. Disegnare il diagramma di Hasse del poset $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$, ordinato rispetto alla divisibilità. È un reticolo? Se sì è un reticolo complementato? Motivare la risposta.

SOL:

È un reticolo, non è complementato (per esempio 2 non ha complemento)

8. Sia $\bar{a}$ un elemento di $\mathbb{Z}_n$. Enunciare sotto che ipotesi $\bar{a}$ è invertibile rispetto alla moltiplicazione. Determinare l'insieme $U(\mathbb{Z}_{22})$ degli elementi invertibili modulo 22. Se esiste, determinare l'inverso di $\bar{7}$ modulo 22.

SOL:

L'elemento $\bar{a}$ è invertibile in $\mathbb{Z}_n$ se e solo se $(a, n) = 1$.

$U(\mathbb{Z}_{22}) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{9}, \bar{13}, \bar{15}, \bar{17}, \bar{19}, \bar{21}\}$.

Si ha $\bar{7}^{-1} = \bar{19}$.