

Geometria e Combinatoria

Esercitazione

1. Vero o falso?

- | | |
|---------------------------------------|--|
| (a) $1 \in \{1, 2, \{3, 4\}\}.$ | (d) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}.$ |
| (b) $1 \in \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}.$ | (e) $\{1, 2\} \subseteq \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}.$ |
| (c) $\{1, 2, 1\} \subseteq \{1, 2\}.$ | (f) $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, \{3, 4\}\}.$ |

2. Costruire le tavole di verità per

- (a) $(\neg(p \leftrightarrow q)) \leftrightarrow ((p \vee q) \rightarrow (\neg(p \wedge q)))$; (b) $(\neg r) \wedge (q \rightarrow (p \vee r))$;

3. Con le assegnazioni p vero, q falso, r vero, s falso, t vero, qual è il valore di verità delle seguenti proposizioni composte:

- | | |
|---|---|
| (a) $p \vee (t \leftrightarrow (r \wedge s))$; | (c) $p \rightarrow ((s \wedge t) \leftrightarrow q)$; |
| (b) $q \wedge (t \rightarrow p)$; | (d) $(p \wedge ((\neg q) \vee r)) \leftrightarrow (s \vee t)$ |

4. Sia f l'applicazione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $f(x) = \frac{3x^3-2}{7}$. È iniettiva? È suriettiva? Se è possibile, calcolare f^{-1} .

5. Siano $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $g(x) = 3x + 2$ e $h(x) = x - 7$. Calcolare $g \circ h$ e, se esiste, $(h \circ g)^{-1}$.

6. Siano, f, g, h le seguenti permutazioni di S_5 ; calcolare $f \circ g^{-1} \circ h^2$.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definita come $f((a, b)) = a + b$. Qual è l'immagine di f ? Qual è la controimmagine di $\{0, 1\}$?

8. Siano $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 \leq x \leq 15\}$, $B = 3\mathbb{Z}$, $C = 4\mathbb{Z}$. Quanti elementi ha l'insieme delle parti dell'insieme

$$A \setminus (B \cup C)?$$

9. Sia $A = \{a, b, c\}$ con insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$. Si consideri l'applicazione

$$\cap : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$$

Descrivere dominio, codominio e immagine dell'applicazione. Qual è la cardinalità della controimmagine di $\{b\}$?

10. Mostrate che se le applicazioni $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ sono iniettive (suriettive), anche la composizione $g \circ f$ è un'applicazione iniettiva (suriettiva).

(EXTRA: Non vale il viceversa: dare un esempio di applicazioni $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ tali che $g \circ f$ sia iniettiva, ma almeno una fra f e g non lo sia; e lo stesso con "suriettiva" al posto di "iniettiva").

11. Le seguenti proposizioni sono logicamente equivalenti?

- $\neg(p \vee q)$ e $(\neg p) \wedge (\neg q)$.
- $p \rightarrow (q \wedge (\neg p))$ e $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow p)$.

12. Mostrate che se si scelgono 5 carte da un mazzo di 52 carte, almeno due avranno lo stesso seme.