Geometria e Combinatoria
Esercitazione - Alcune Soluzioni

1. Vero o falso?

   (a) $1 \in \{1, 2, \{3, 4\}\}$. V

   (b) $1 \in \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$. F

   (c) $\{1, 2, 1\} \subseteq \{1, 2\}$. V

   (d) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$. V

   (e) $\{1, 2\} \subseteq \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$. F

   (f) $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, \{3, 4\}\}$. V

2. Costruire le tavole di verità per

   (a) $(\neg(p \leftrightarrow q)) \leftrightarrow ((p \vee q) \to (\neg(p \wedge q)))$;

   (b) $(\neg r) \wedge (q \to (p \vee r))$;

3. Con le assegnazioni p vero, q falso, r vero, s falso, t vero, qual è il valore di verità delle sequenti proposizioni composte:

   (a) $p \vee (t \leftrightarrow (r \wedge s))$; V

   (b) $q \wedge (t \to p)$; F

   (c) $p \to ((s \wedge t) \leftrightarrow q)$; V

   (d) $(p \wedge ((\neg q) \vee r)) \leftrightarrow (s \vee t))$ V

4. Sia f l'applicazione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $f(x) = \frac{3x^3-2}{7}$. È iniettiva? È suriettiva? Se è possibile, calcolare f^{-1}.

   Sol: È biiettiva, e si ha $f^{-1}(z) = \sqrt[3]{\frac{7z+2}{3}}$

5. Siano $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $g(x) = 3x + 2$ e $h(x) = x - 7$ Calcolare $g \circ h$ e, se esiste, $(h \circ g)^{-1}$.

   Sol: $(g \circ h)(x) = 3x - 19$. $(h \circ g)^{-1}(x) = (x + 5)/3$

6. Siano, f, g, h le seguenti permutazioni di S_5; calcolare $f \circ (g^{-1}) \circ h^2$.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

   Sol:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita come $f((a, b)) = a + b$. Qual è l'immagine di f? Qual è la controimmagine di $\{0, 1\}$?

   Sol: L'immagine è $\mathbb{N}$. Si ha $f^{-1}(\{0, 1\}) = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$

8. Siano $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 \leq x \leq 15\}$, $B = 3\mathbb{Z}$, $C = 4\mathbb{Z}$. Quanti elementi ha l'insieme delle parti dell'insieme

$$A \setminus (B \cup C)?$$

   Sol: $2^7 = 128$

9. Sia $A = \{a, b, c\}$ con insieme della parti $\mathcal{P}(A)$. Si consideri l'applicazione

$$\cap : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$$

   Descrivere dominio, codominio e immagine dell'applicazione. Qual è la cardinalità della controimmagine di $\{b\}$?

   Sol: Il dominio è $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$, il codominio è $\mathcal{P}(A)$, l'immagine è anche $\mathcal{P}(A)$. La controimmagine di $\{b\}$ ha cardinalità 9.

10. Mostrate che se le applicazioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$ sono iniettive (suriettive), anche la composizione $g \circ f$ è un'applicazione iniettiva (suriettiva).
(EXTRA: Non vale il viceversa: dare un esempio di applicazioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$ tali che $g \circ f$ sia iniettiva, ma almeno una fra f e g non lo sia; e lo stesso con "suriettiva" al posto di "iniettiva").

11. Le seguenti proposizioni sono logicamente equivalenti?
    - $\neg(p \vee q)$ e $(\neg p) \wedge (\neg q)$.
    - $p \to (q \wedge (\neg p))$ e $\neg((p \to q) \to p)$.

12. Mostrate che se si scelgono 5 carte da un mazzo di 52 carte, almeno due avranno lo stesso seme.
Sol: Per ogni scelta di A sottoinsieme di 5 carte scelte da un mazzo di 52, l'applicazione
$$f : A \to \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$$
non è mai iniettiva.

13. Sia $|A| = m, |B| = n$. Quante sono le applicazioni iniettive $f : A \to B$?
Sol: $n(n-1)\dots(n-(m-1)) = n!/m!$