

Geometria e Combinatoria

Poset, reticoli, algebre di Boole

1. Sia $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Verificare che la relazione \preceq definita su A come

$$(a, b) \preceq (c, d) \iff a \leq c \text{ e } b \leq d$$

è una relazione d'ordine. È un ordine totale?

2. (a) Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ con l'ordinamento naturale (cioè $x \preceq y \iff x \leq y$). Disegnare il diagramma di Hasse. È un reticolo? È un reticolo complementato?
- (b) Sia $D_{36} \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme dei divisori di 36, ordinato rispetto alla divisibilità. Disegnare il diagramma di Hasse del reticolo $(D_{36}, |)$. È un reticolo complementato?
- (c) Sia $D_{231} \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme dei divisori di 231, ordinato rispetto alla divisibilità. Disegnare il diagramma di Hasse del reticolo $(D_{231}, |)$. È un reticolo complementato? Trovare, se esiste, complemento di 11.
3. Quale dei poset dell'esercizio 2 è un'algebra di Boole?
4. Sia (R, \preceq) un reticolo. Mostrare che si ha

$$a \vee (a \wedge b) = a \quad a \wedge (a \vee b) = a.$$