geometria e combinatoria

insiemi e applicazioni

1. Descrivere $A \cap B$ nei seguenti casi:
   (a) A è l'insieme dei numeri naturali pari, B quello dei numeri naturali divisibili per 5;
   (b) $A = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x = 2t, t \in \mathbb{Z}\}$, B è l'insieme dei numeri primi;
   (c) $A = 6\mathbb{Z}$, $B = 9\mathbb{Z}$ (per $a \in \mathbb{Z}$, $a\mathbb{Z}$ è l'insieme dei multipli di a).
2. Vero o falso?
   (a) $1 \in \{1, 2, \{3, 4\}\}$.
   (b) $1 \in \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$.
   (c) $\{1, 2, 1\} \subseteq \{1, 2\}$.
   (d) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$.
   (e) $\{1, 2\} \subseteq \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$.
   (f) $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, \{3, 4\}\}$.
3. Dimostrare che si ha $A \cup B = A \iff B \subseteq A$.
4. Quale delle seguenti affermazioni è FALSA?
   (a) $2 \in A \cup B$ implica che, se $2 \notin A$, allora $2 \in B$.
   (b) $\{3, 4\} \subseteq A$ implica che $3 \in A$ e $4 \in A$.
   (c) $\{1\} \in A$ e $\{2\} \in A$ implica che $\{1, 2\} \subseteq A$.
   (d) $A \cap B \supseteq \{3, 4\}$ implica che $\{3, 4\} \subseteq A$ e $\{3, 4\} \subseteq B$
5. Dimostrare che si ha
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$
6. Siano $A = \{x \in \mathbb{Z} \ | \ 0 \leq x \leq 12\}$, $B = 4\mathbb{Z}$, $C = 6\mathbb{Z}$. Quanti elementi ha l'insieme delle parti dell'insieme
$$A \setminus (B \cap C)?$$
7. Dimostrare che si ha
$$\mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}A \cup \mathcal{C}B.$$
8. Verificare quali delle seguenti applicazioni f (in cui A è il dominio e B il codominio, e x è un elemento di A) sono iniettive, quali suriettive, quali biiettive. Per le funzioni biettive, determinare f^{-1}.

(a) $A = \{\text{mesi dell'anno}\}$, $B = \{\text{lettere dell'alfabeto italiano}\}$, $f(x)$ = lettera con cui inizia il nome di x;

(b) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$;

(c) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2$;

(d) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$;

(e) $A = \mathbb{R}^{\geq 0}$, $B = \mathbb{R}^{\geq 0}$, $f(x) = x^2$;

(f) $A = \mathbb{C}$, $B = \mathbb{C}$, $f(x) = x^2$;

(g) $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{2x-1}{3}$;

(h) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^5-15}{5}$;

(i) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $f(x) = 5x + 2$.

9. Siano $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ e $B = \{b_1, b_2\}$. Scrivere tutte le possibili applicazioni $f : A \to B$. Quante sono? Quante di queste sono iniettive, quante suriettive? Stesso esercizio per le $f : B \to A$.

10. Sia $f : A \to B$ una funzione, e siano X, Y sottoinsiemi di A. Mostrare che si ha

    (a) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$,

    (b) $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$;

    mostrare che l'inclusione in (b) può essere stretta.

11. Calcolare $f \circ g$ e $g \circ f$ per

    (a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x - 4$ $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g(x) = x^3$.

    (b) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{3x+1}{5}$ $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $g(x) = x^2 + 1$.

12. Mostrate che se le applicazioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$ sono iniettive (suriettive), anche la composizione $g \circ f$ è un'applicazione iniettiva (suriettiva). (EXTRA: Non vale il viceversa: dare un esempio di applicazioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$ tali che $g \circ f$ sia iniettiva, ma almeno una fra f e g non lo sia; e lo stesso con "suriettiva" al posto di "iniettiva").