Esercizi di Geometria
Applicazioni lineari

1. Dimostrare che l'applicazione lineare $f : V \to W$ è iniettiva se e solo se si ha $\text{Ker} f = \{0_W\}$.

2. Determinare, al variare di $k \in R$, una base e la dimensione per il nucleo e l'immagine delle seguenti trasformazioni lineari.

   (a) $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f_a((x, y, z)) = (-x + y + kz, 3x + 3y + 2z, 4x + 2y + kz)$.

   (b) $f_b : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f_b((x, y, z)) = (x + 3y + -2z, -2x + ky + 3z)$.

   (c) $f_c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f_c((x, y)) = (x + 2y, ky, 3x + (6 + k)y)$.

3. Determinare l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f((1, 1)) = (4, 2)$ e $f((1, 0)) = (-2, -1)$. Trovare una base per il nucleo di questa applicazione.

4. Mostrare che un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ non può essere iniettiva, e che un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ non può essere suriettiva.

5. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare; è vero che se i vettori $f(v_1), f(v_2), \ldots f(v_k)$ sono linearmente indipendenti in W, allora i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti in V?

6. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare; è vero che se i vettori $f(v_1), f(v_2), \ldots f(v_k)$ sono linearmente dipendenti in W, allora i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_k$ sono linearmente dipendenti in V?

7. Trovare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ risulta iniettiva l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f((1, -1)) = (k, -1)$ e $f((0, 1)) = (-2, 3)$.

8. In $\mathbb{R}^2$ si consideri il sottospazio $S = \{(x, x)\ x \in \mathbb{R}\}$. Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\text{ker} f = S$.

9. Sia A una matrice non invertibile $n \times n$. Quali affermazioni sono sicuramente vere?

   le righe di A sono dipendenti ☐ Il sistema $AX = B$ possiede infinite soluzioni ☐

   $\text{rg}A = n - 1$ ☐ l'applicazione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(v) = Av$, non è suriettiva ☐

   Il sistema $AX = 0$ possiede infinite soluzioni ☐ le colonne di A sono indipendenti ☐