geometria e combinatoria

applicazioni, relazioni

1. Verificare quali delle seguenti applicazioni f (in cui A è il dominio e B il codominio, e x è un elemento di A) sono iniettive, quali suriettive, quali biiettive. Per le funzioni biettive, determinare f^{-1}.

   (a) $A = \{\text{mesi dell'anno}\}$, $B = \{\text{lettere dell'alfabeto italiano}\}$, $f(x)$ = lettera con cui inizia il nome di x;
   (b) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$;
   (c) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2$;
   (d) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$;
   (e) $A = \mathbb{C}$, $B = \mathbb{C}$, $f(x) = x^2$;
   (f) $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{2x-1}{3}$;
   (g) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^5-15}{5}$;
   (h) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $f(x) = 5x + 2$.

2. Sia $f : A \to B$ una funzione, e siano X, Y sottoinsiemi di A. Mostrare che si ha

   (a) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$,
   (b) $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$;

   mostrale che l'inclusione in (b) può essere stretta.

3. Siano, f, g, h le seguenti permutazioni di S_6; calcolare $f^{-1} \circ g^2 \circ h$.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$
$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Mostrate che se le applicazioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$ sono iniettive (suriettive), anche la composizione $g \circ f$ è un'applicazione iniettiva (suriettiva). Non vale il viceversa: dare un esempio di applicazioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$ tali che $g \circ f$ sia iniettiva, ma almeno una fra f e g non lo sia; e lo stesso con "suriettiva" al posto di "iniettiva".

5. Verificare quali delle seguenti relazioni ρ (in cui A è l'insieme su cui sono definite, e x e y sono elementi di A) sono riflessive, quali simmetriche, quali transitive, quali di equivalenza. Per le relazioni di equivalenza, capire come è fatto l'insieme A/ρ delle classi di equivalenza.

(a) $A = \{x \mid x$ è un essere umano$\}$, $x\rho y$ se e solo se x e y sono nati nello stesso anno;

(b) $A = \{x \mid x$ è un essere umano$\}$, $x\rho y$ se e solo se x e y sono figli dello stesso padre;

(c) $A = \{x \mid x$ è un essere umano$\}$, $x\rho y$ se e solo se x e y hanno un genitore in comune;

(d) A è l'insieme dei punti del piano della geometria euclidea, $x\rho y$ se e solo se $\overline{xy} < 1$ (dove $\overline{xy}$ è la distanza tra x e y);

(e) A è l'insieme delle rette nel piano, $x\rho y$ se e solo se x e y sono parallele;

(f) A è l'insieme delle rette nel piano, $x\rho y$ se e solo se x e y non sono parallele;

(g) $A = \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$, $x\rho y$ se e solo se $x \cap y \neq \emptyset$ (attenzione - in questo caso x e y sono insiemi);

(h) $A = \mathbb{Z}$, $x\rho y$ se e solo se $\mathrm{MCD}(x,y) = 1$;

(i) $A = \{(m,n) : m,n \in \mathbb{Z}\}$, $x\rho y$ se e solo se il massimo comun divisore degli elementi di x (che qui è una coppia di numeri) è uguale a quello di y;

(j) $A = \mathbb{Z}$, $x\rho y$ se e solo se x e y non hanno divisori in comune (ad esempio $10\,\rho\,9$, mentre $12 \not\rho\, 15$ perché 3 divide sia 12 che 15);