

## Esercizi di geometria

### Diagonalizzazione

1. Per quali  $k \in \mathbb{R}$  il vettore  $\mathbf{v} = (1, 4, 2)$  è un autovettore per la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

2. Se  $A$  è una matrice tale che  $\det(A) = 2$ , allora 0 può essere un autovalore per  $A$ ? Motivare la risposta.

3. Se  $\lambda$  è un autovalore di  $A$  mostrare che  $k\lambda$  è un autovalore di  $kA$  per ogni  $k \in \mathbb{R}$ , e che  $\lambda^2$  è un autovalore per  $A^2$ .

4.
  - Se  $A$  e  $B$  sono matrici simili, provare che  $A^k$  è simile a  $B^k$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ .
  - Se  $A$  e  $B$  sono matrici simili, provare che  $A^T$  è simile a  $B^T$ .

5. Determinare gli autovalori, gli autovettori e gli autospazi della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

$A$  è diagonalizzabile?

6. Determinare gli autovalori, gli autovettori e gli autospazi della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$A$  è diagonalizzabile?

7. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile? Se sì, trovare 3 autovettori indipendenti per  $A$ .

8. Trovare una matrice  $3 \times 3$  che abbia come autovettori i vettori  $\mathbf{v}_1 = (0, 1, -2)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 1, -3)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1)$  associati rispettivamente agli autovalori  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = -2$ .