Esercizi di Geometria

Dipendenza e indipendenza lineare

1. Determinare se $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ nei seguenti casi:
   (a) $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w} = (0, 1, 3)$
   (b) $\mathbf{v} = (3, 1, -3)$, $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w} = (0, 1, 3)$
   (c) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
   (d) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
   (e) $\mathbf{v} = 1 + 4x - 3x^2$, $\mathbf{u} = 1 + x$, $\mathbf{w} = x - x^2$
   (f) $\mathbf{v} = 1 + x - 3x^2$, $\mathbf{u} = 1 + 2x$, $\mathbf{w} = x - x^2$

2. Determinare se $\{\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ sono vettori dipendenti o indipendenti nei seguenti casi:
   (a) $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w} = (0, 1, 3)$
   (b) $\mathbf{v} = (3, 1, -3)$, $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w} = (0, 1, 3)$
   (c) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
   (d) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
   (e) $\mathbf{v} = 1 + 4x - 3x^2$, $\mathbf{u} = 1 + x$, $\mathbf{w} = x - x^2$
   (f) $\mathbf{v} = 1 + x - 3x^2$, $\mathbf{u} = 1 + 2x$, $\mathbf{w} = x - x^2$

3. Determinare quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$ è costituito da vettori linearmente indipendenti

$$\{(0,1,2,3),(1,2,3,4),(2,3,4,5),(3,4,5,6),(4,5,6,7)\} \quad \square$$
$$\{(1,2,3,4),(2,3,4,1),(3,4,1,2),(0,1,6,3)\} \quad \square$$
$$\{(1,2,3,4),(2,3,4,1),(5,7,9,-1)\} \quad \square$$
$$\{(1,2,3,4),(2,3,4,1),(1,1,1,1)\} \quad \square$$
$$\{(2,4,6,8),(3,6,9,12)\} \quad \square$$

4. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i vettori di $\mathbb{R}^3$ $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{v}_2 = (3, 2, k), \mathbf{v}_3 = (0, 1, k)$ risultano linearmente dipendenti?

5. Esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui i vettori di $\mathbb{R}^4$ $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 3), \mathbf{v}_2 = (3, 2, 0, k), \mathbf{v}_3 = (0, 1, 1, k)$ risultano linearmente dipendenti?

6. Mostrare che un insieme di vettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ in uno spazio vettoriale V è dipendente se e solo se uno dei $\mathbf{v}_i$ è combinazione lineare dei rimanenti vettori.

7. Sia V uno spazio vettoriale e $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un insieme di vettori di V. Mostare che
   (a) Se A è indipendente, ogni sottoinsieme $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$ è indipendente.
   (b) Se A è dipendente, ogni sovrainsieme B di A, $A \subseteq B$ è dipendente.