

### Esercizi di Geometria

Matrici, prodotto righe per colonne

1. Determinare la matrice  $A$  tale che

$$\frac{1}{2}A - 3 \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Mostrare che si ha:

- (a)  $(A^T)^T = A$ ;
- (b)  $(A + B)^T = A^T + B^T$ ;
- (c)  $(cA)^T = cA^T$

3. Dire quali delle seguenti coppie di matrici possono essere moltiplicate fra loro; quando è possibile, calcolare il prodotto.

- (a)

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$$

- (b)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad (5 \quad -2);$$

- (c)

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Siano  $A, B$  le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$

calcolare  $AB$  e  $BA$ . Cosa potete osservare?

5. Verificare che

$$(AB)^T = B^T A^T$$

usando due matrici  $2 \times 2$  arbitrarie.

6. Calcolare  $A^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , per le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. (a) Trovare una matrice  $A \neq I$  tale che  $A^2 = I$ .  
(b) Trovare una matrice  $A \neq 0$  tale che  $A^2 = 0$ .
8. Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere, e quali false. (Fornire una dimostrazione se l'affermazione è vera, e un controesempio se falsa.) Siano  $A, B$  due matrici.
- (a) Se  $AB$  è definita, anche  $BA$  lo è.  
(b) Se  $AB$  è definita e  $A$  è una matrice quadrata, anche  $BA$  è definita.  
(c) Se  $AB = BA$ , allora  $A$  e  $B$  sono matrici quadrate dello stesso ordine.  
(d) Se  $A^2$  è definita, allora  $A$  è una matrice quadrata.  
(e) Se  $A^2 = I$ , allora  $A = I$ ; se  $A^2 = 0$ , allora  $A = 0$ .  
(f) Se  $A$  e  $B$  sono matrici quadrate dello stesso ordine, allora l'uguaglianza  $(AB)^2 = A^2B^2$  è sempre vera.  
(g) Se  $A$  e  $B$  sono matrici quadrate dello stesso ordine, allora l'uguaglianza  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$  è sempre vera.  
(h) Se  $A$  ha righe nulle, allora anche  $AB$  ha righe nulle.  
(i) Se  $A$  ha colonne nulle, allora anche  $AB$  ha colonne nulle.  
(j) Se  $B$  ha righe nulle, allora anche  $AB$  ha righe nulle.  
(k) Se  $B$  ha colonne nulle, allora anche  $AB$  ha colonne nulle.