Esercitazione

Geometria e Combinatoria

1. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema è compatibile?

$$\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x - 2y = -5 \\ 3x + 4y = k \end{cases}$$

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, studiare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k & -1 \\ 2 & 3 & k-1 & 1 \\ -k & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice dell'esecizio 3 è invertibile?

5. Se $A \in M_3(\mathbb{R})$ è tale che $A^3 = 3I$, A è invertibile? Motivare la risposta.

6. Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubiltà del sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2k \\ 3x - 4y + 2kz = -2 \\ -kx + 4kz = 0 \end{cases}.$$

7. Risolvere il sistema dell'esercizio precedente per $k = 0$.

8. Determinare la matrice inversa della matrice $\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$.

9. Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori di uno spazio vettoriale V tali che $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono linearmente dipendenti. Mostrare che $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ formano un insieme dipendente.

10. Per quali $k \in \mathbb{R}$ si ha che i vettori di $\mathbb{R}^4$ $\mathbf{v}_1 = (1, 1, k, -2), \mathbf{v}_2 = (1, k, 1, 1), \mathbf{v}_3 = (k, 1, 1, 1)$ sono indipendenti?

11. Determinare una base ortogonale e la dimensione per il sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - 2w = 0, \text{ e } y - 3z = 0\}.$$

    Determinare una base e la dimensione per il sottospazio $T = \{(x, y, z, w) \mid x + 3y - z = 0\}$ di $\mathbb{R}^4$. Determinare una base e la dimensione di $S \cap T$

12. Sia A un sottoinsieme di uno spazio vettoriale V, con $\mathbf{O}_V \in A$. Mostrare che l'insieme A è dipendente.

13. Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori di uno spazio vettoriale V. Mostrare che i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, 2\mathbf{u} - \mathbf{v} + 3\mathbf{w}$ sono dipendenti.

14. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Mostrare che $A + A^T$ è una matrice simmetrica, e che $A - A^T$ è una matrice antisimmetrica. Mostrare che ogni matrice si può scrivere come somma di una matrice simmetrica e una antisimmetrica.