

Geometria e Combinatoria
Esercitazione

1. L'applicazione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$f(x) = \frac{3x^3 - 2}{7}$$

è iniettiva? È suriettiva? Se è possibile, calcolare f^{-1} .

2. Siano $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $g(x) = 3x + 2$ e $h(x) = x - 7$. Calcolare $g \circ h$ e $(h \circ g)^{-1}$.

3. Siano, f, g, h le seguenti permutazioni di S_5 ; calcolare $f \circ g^{-1} \circ h^2$.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Risolvere, se è possibile, la congruenza lineare $10x \equiv 6 \pmod{12}$. Quante e quali soluzioni fra di loro non congrue modulo 12 ha tale congruenza?
5. Siano $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 \leq x \leq 15\}$, $B = 3\mathbb{Z}$, $C = 4\mathbb{Z}$. Quanti elementi ha l'insieme delle parti dell'insieme

$$A \setminus (B \cup C)?$$

6. Quante parole di tre lettere si possono formare con le lettere della parola LAMA?
7. In quanti modi posso scegliere una squadra di 4 persone, una della quali è il caposquadra, potendo scegliere fra 8 persone?
8. Determinare l'insieme degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{16}$. Determinare, se se esiste, in $\mathbb{Z}_{16}$ l'inverso di $\bar{7}$.
9. Risolvere, se è possibile, il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{7} \\ x \equiv 6 \pmod{8} \end{cases}$$

10. Calcolare $2^{72} \pmod{5}$. (il risultato dev'essere un numero compreso fra 0 e 4).

11. Tracciare il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato:

$$(\{1, 2, 3, 5, 9, 30, 90\}, |).$$

È un reticolo? Motivare la risposta.

12. Dimostrare che, se $\mathbb{Z}_m$ è un campo, allora m è primo.

13. Scrivere la tavola di verità di $(p \rightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge (\neg q)) \rightarrow (\neg p))$.

14. Quali dei seguenti sottoinsiemi di $(U(\mathbb{Z}_{27}), \cdot)$ è un sottogruppo? (attenzione, la risposta giusta non è necessariamente una sola).

$$\{1, 2, 4, 8, 16\} \quad \square$$

$$\{1, 26\} \quad \square$$

$$\{1, 3, 6, 9, 12, 15, 18\} \quad \square$$

$$\{1, 10, 19\} \quad \square$$

15. Per quali dei seguenti valori di n esiste un campo con n elementi? (attenzione, la risposta giusta non è necessariamente una sola).

$$n = 26 \quad \square \quad n = 27 \quad \square \quad n = 28 \quad \square$$

$$n = 29 \quad \square \quad n = 30 \quad \square \quad n = 31 \quad \square$$

$$n = 32 \quad \square \quad n = 33 \quad \square \quad n = 34 \quad \square$$

16. Esiste un grafo con 7 vertici in cui ogni vertice ha grado 3? Se sì, disegnate un esempio, se no, dimostrate la non esistenza.

17. Trovare, se è possibile, soluzioni intere per l'equazione

$$12x + 20y = 8.$$