

Cognome e nome:

Numero di matricola:

- NON potete utilizzare libri / appunti / calcolatrice
 - scrivete SOLO le soluzioni, non il procedimento né i conti, e consegnate SOLO questo foglio
 - nelle domande a risposta multipla (“con le crocette”) la risposta giusta può essere una o più di una (potreste dover mettere più di una crocetta).
-

1. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, se ne esistono, il sistema non ammette soluzioni?

$$\begin{cases} x - y + w = 1 \\ 2x + y + z + 3w = -2 \\ ky + 3z + 3w = 1 \end{cases} .$$

Trovare le soluzioni del sistema per $k = 3$.

2. Trovare una base ortogonale e la dimensione del sottospazio $S = \{(x, y, z, w) \mid 2x + y - z - w = 0, x - 4w = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$; trovare una base e la dimensione dei sottospazi $T = \{(x, y, z, w) \mid x - 2y + z = 0\}$ e $S \cap T$ di \mathbb{R}^4 .

3. Per quali $k \in \mathbb{R}$ è invertibile la matrice A ? Fissato un valore di k (specificare esplicitamente quale), determinare A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & k & 3 \end{pmatrix} .$$

4. Quante e quali soluzioni fra di loro non congrue modulo 33 ha la congruenza lineare

$$24x \equiv 18 \pmod{33}?$$

5. Siano A, B due insiemi con $|A| = n, |B| = m$ e $m > n$. Quali affermazioni sono sicuramente vere?

- Esiste almeno una funzione iniettiva con dominio A e codominio B .
- Esiste almeno una funzione suriettiva con dominio A e codominio B .
- Ci sono esattamente m^n funzioni con dominio A e codominio B .
- Ci sono esattamente n^m funzioni con dominio A e codominio B .

6. Sia A una matrice $n \times n$, e sia $\det A = 0$. Quali affermazioni sono sicuramente vere?

- A non è invertibile
- Il sistema $AX = B$ possiede infinite soluzioni
- $\operatorname{rg} A = n - 1$
- l'applicazione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, f(v) = Av$, è iniettiva
- A ammette 0 come autovalore
- le colonne di A sono dipendenti

7. Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, una base e la dimensione per il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f((x, y, z)) = (x - y, 2x + y + z, ky + 3z)$.

8. Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; determinare gli autovalori e gli autospazi di A e stabilire se A è diagonalizzabile.

9. Quanti sottoinsiemi di 9 elementi ha un insieme di 12 elementi?

10. Scrivere la tavola di verità della proposizione $((p \wedge q) \leftrightarrow q) \rightarrow ((p \wedge (\neg q)) \rightarrow p)$.