

Cognome e nome:

Numero di matricola:

- NON potete utilizzare libri / appunti / calcolatrice
- scrivete SOLO le soluzioni, non il procedimento né i conti, e consegnate SOLO questo foglio
- nelle domande a risposta multipla (“con le crocette”) la risposta giusta può essere una o più di una (potreste dover mettere più di una crocetta).

1. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, se ne esistono, il sistema ha infinite soluzioni?

$$\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 4 \\ 3y - 3z = 3 \\ -3kx + ky - kz = 2 \end{cases} .$$

Trovare le soluzioni del sistema per $k = -2$.

2. Trovare una base ortogonale e la dimensione del sottospazio $S = \{(x, y, z, w) \mid x+2y-z+w = 0, y-3z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$; trovare una base e la dimensione dei sottospazi $T = \{(x, y, z, w) \mid x - 2y + w = 0\}$ e $S \cap T$ di \mathbb{R}^4 .

3. Per quali $k \in \mathbb{R}$ è invertibile la matrice A ? Fissato un valore di k (specificare esplicitamente quale), determinare A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2k & 3 \end{pmatrix} .$$

4. Determinare in quali dei seguenti casi si ha $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$, con $\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$.

- $V = \mathbb{R}^3$; $\mathbf{v} = (1, 3, 2)$, $\mathbf{u} = (1, 2, 0)$, $\mathbf{w} = (3, 1, -1)$
- $V = \mathbb{R}^4$; $\mathbf{v} = (1, 3, 2, -1)$, $\mathbf{u} = (1, 2, 2, 2)$, $\mathbf{w} = (1, 4, 2, -4)$
- $V = M_{2 \times 2}$; $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

5. Sia A una matrice $n \times n$ tale che le sue righe siano vettori indipendenti di \mathbb{R}^n . Quali affermazioni sono sicuramente vere?

A è invertibile

Il sistema $AX = B$ possiede infinite soluzioni

$\text{rg}A = n - 1$

l'applicazione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(v) = Av$, è suriettiva

A ammette 0 come autovalore

le colonne di A sono indipendenti

6. Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, una base e la dimensione per il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f((x, y, z)) = (x - 2y, -2x + y + 3z, 2ky + 3z)$.

7. Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; determinare gli autovalori e gli autospazi di A e stabilire se A è diagonalizzabile.

8. Si consideri il sistema lineare costituito dalla sola equazione $2x + y - z - w = 0$ nelle incognite x, y, z, w . Per ogni affermazione, cerchi la risposta giusta.

il sistema lineare dato ha esattamente 4 soluzioni.

VERO FALSO

il sistema lineare dato ha ∞^4 soluzioni (infinite soluzioni che dipendono da 4 parametri).

VERO FALSO

fra le soluzioni del sistema lineare dato c'è $(2, 1, 1, 4)$.

VERO FALSO

$(1, h, h, h)$ è soluzione del sistema dato se e solo se $h = 2$.

VERO FALSO