Prova intermedia di Geometria e Combinatoria **25/1/2016.**

Cognome e nome:
Numero di matricola:

- **NON potete utilizzare libri / appunti / calcolatrice**
- **scrivete SOLO le soluzioni, non il procedimento né i conti, e consegnate SOLO questo foglio**
- **nelle domande a risposta multipla ("con le crocette") la risposta giusta può essere una o più di una (potreste dover mettere più di una crocetta).**

---

1. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, se ne esistono, il sistema ha infinite soluzioni?

$$\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 4 \\ 3y - 3z = 3 \\ -3kx + ky - kz = 2 \end{cases}.$$

Risposta.
per $k = -2$.

Trovare le soluzioni del sistema per $k = -2$.

Risposta.
$\{(2/3, 1 + t, t), \quad t \in \mathbb{R}\}$

2. Trovare una base ortogonale e la dimensione del sottospazio $S = \{(x, y, z, w) \mid x+2y-z+w = 0,\ y-3z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$; trovare una base e la dimensione dei sottospazi $T = \{(x, y, z, w) \mid x - 2y + w = 0\}$ e $S \cap T$ di $\mathbb{R}^4$.

Risposta. $\dim S = 2$, $\mathcal{B}_S = \{(-1, 0, 0, 1), (-5/2, 3, 1, -5/2)\}$ ottenuta ortogonalizzando la base $\{(-1, 0, 0, 1), (-5, 3, 1, 0)\}$
$\dim T = 3$, $\mathcal{B}_S = \{(2, 1, 0, 0), (-1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}$
$\dim(S \cap T) = 1$, $\mathcal{B}_{S\cap T} = \{(-1, 0, 0, 1)\}$

3. Per quali $k \in \mathbb{R}$ è invertibile la matrice A? Fissato un valore di k (specificare esplicitamente quale), determinare A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2k & 3 \end{pmatrix}.$$

Risposta. A è invertible per $k \neq -3/2$. Scelto $k = 0$, si ha

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Determinare in quali dei seguenti casi si ha $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$, con $\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$.

$V = \mathbb{R}^3$; $\mathbf{v} = (1, 3, 2)$, $\mathbf{u} = (1, 2, 0)$, $\mathbf{w} = (3, 1, -1)$ ☐
$V = \mathbb{R}^4$; $\mathbf{v} = (1, 3, 2, -1)$, $\mathbf{u} = (1, 2, 2, 2)$, $\mathbf{w} = (1, 4, 2, -4)$ ☒
$V = M_{2\times 2}$; $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ☐

5. Sia A una matrice $n \times n$ tale che le sue righe siano vettori indipendenti di $\mathbb{R}^n$. Quali affermazioni sono sicuramente vere?

A è invertibile ☒

Il sistema $AX = B$ possiede infinite soluzioni ☐

rg$A = n - 1$ ☐

l'applicazione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(v) = Av$, è suriettiva ☒

A ammette 0 come autovalore ☐

le colonne di A sono indipendenti ☒

6. Determinare, al variare di $k \in R$, una base e la dimensione per il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f((x, y, z)) = (x - 2y, -2x + y + 3z, 2ky + 3z)$.

Risposta.
Per $k \neq -3/2$ si ha $\dim Im(f) = 3$, $\mathcal{B}_{Im(f)} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, $\dim Ker(f) = 0$, $\mathcal{B}_{Ker(f)} = \emptyset$.

Per $k = -3/2$ si ha $\dim Im(f) = 2$, $\mathcal{B}_{Im(f)} = \{(1, -2, 0), (0, 3, 3)\}$, $\dim Ker(f) = 1$, $\mathcal{B}_{Ker(f)} = \{2, 1, 1\}$.

7. Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; determinare gli autovalori e gli autospazi di A e stabilire se A è diagonalizzabile.

Risposta.

Gli autovalori sono $3, 1, 1$. Si ha $V_3 = \{(3/2z, z, z) \quad z \in \mathbb{R}\}$, $V_1 = \{(x, 0, 0) \quad x \in \mathbb{R}\}$. Per l'autovalore 1 si ha $m_a(1) = 2 \neq m_g(1) = 1$, e la matrice non è quindi diagonalizzabile.

8. Si consideri il sistema lineare costituito dalla sola equazione $2x + y - z - w = 0$ nelle incognite x, y, z, w. Per ogni affermazione, cerchiate la risposta giusta.

il sistema lineare dato ha esattamente 4 soluzioni. VERO ~~FALSO~~

il sistema lineare dato ha ∞^4 soluzioni (infinite soluzioni che dipendono da 4 parametri). VERO ~~FALSO~~

fra le soluzioni del sistema lineare dato c'è $(2, 1, 1, 4)$. ~~VERO~~ FALSO

$(1, h, h, h)$ è soluzione del sistema dato se e solo se $h = 2$. ~~VERO~~ FALSO