

Esercizi di Geometria
Spazi vettoriali e sottospazi

1. Quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$? Motivare la risposta.

- (a) $\{(x, y, 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
- (b) $\{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$
- (c) $\{(x, x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
- (d) $\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \text{ e } x + y = z\}$
- (e) $\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \text{ e } x^2 + y^2 = z^2\}$

2. Mostrare che l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

3. Quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi di $M_2(\mathbb{R})$? Motivare la risposta.

- (a) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$
- (b) $\{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$
- (c) $\{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^2 = A\}$
- (d) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } a + c = b + d \right\}$

4. Quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi di $\mathbb{R}_3[x]$? Motivare la risposta.

- (a) $\{p(x) \mid p(2) = 0\}$
- (b) $\{p(x) \mid p(2) = 1\}$
- (c) l'insieme dei polinomi di $\mathbb{R}_3[x]$ con termine noto pari a zero:
 $\{a_1x + a_2x^2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

5. Sia U un sottospazio di V . Mostare che

- (a) se $a\mathbf{v} \in U$ con $a \neq 0$, allora $\mathbf{v} \in U$;
- (b) se $\mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{u} \in U$, allora $\mathbf{u} \in U$.