geometria e combinatoria

applicazioni, relazioni

1. Siano, f, g, h le seguenti permutazioni di S_6; calcolare $f^{-1} \circ g^2 \circ h$.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Mostrate che se le applicazioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$ sono iniettive (suriettive), anche la composizione $g \circ f$ è un'applicazione iniettiva (suriettiva). (EXTRA: Non vale il viceversa: dare un esempio di applicazioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$ tali che $g \circ f$ sia iniettiva, ma almeno una fra f e g non lo sia; e lo stesso con "suriettiva" al posto di "iniettiva").

3. Verificare quali delle seguenti relazioni ρ (in cui A è l'insieme su cui sono definite, e x e y sono elementi di A) sono riflessive, quali simmetriche, quali transitive, quali di equivalenza o di ordine.

   (a) $A = \{x \mid x \text{ è un essere umano}\}$, $x \rho y$ se e solo se x e y sono nati nello stesso anno;

   (b) $A = \{x \mid x \text{ è un essere umano}\}$, $x \rho y$ se e solo se x e y sono figli dello stesso padre;

   (c) $A = \{x \mid x \text{ è un essere umano}\}$, $x \rho y$ se e solo se x e y hanno un genitore in comune;

   (d) A è l'insieme dei punti del piano della geometria euclidea, $x \rho y$ se e solo se $\overline{xy} < 1$ (dove $\overline{xy}$ è la distanza tra x e y);

   (e) A è l'insieme delle rette nel piano, $x \rho y$ se e solo se x e y sono parallele;

   (f) A è l'insieme delle rette nel piano, $x \rho y$ se e solo se x e y non sono parallele;

   (g) $A = \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$, $x \rho y$ se e solo se $x \cap y \neq \emptyset$ (attenzione - in questo caso x e y sono insiemi);

   (h) $A = \mathcal{P}(B)$, B un insieme, $x \rho y$ se e solo se $x \subseteq y$ (attenzione - in questo caso x e y sono insiemi);

   (i) $A = \mathbb{Z}$, $x \rho y$ se e solo se $\mathrm{MCD}(x, y) = 1$;

   (j) $A = \mathbb{Z}$, $x \rho y$ se e solo se x e y non hanno divisori in comune (ad esempio $10 \, \rho \, 9$, mentre $12 \not\rho \, 15$ perché 3 divide sia 12 che 15);