Esercizi di Geometria e Combinatoria

Dipendenza e indipendenza lineare. Base e dimensione

1. Determinare se $\{\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ sono vettori dipendenti o indipendenti nei seguenti casi:

   (a) $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w} = (0, 1, 3)$ in $\mathbb{R}^3$.

   (b) $\mathbf{v} = (3, 1, -3)$, $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w} = (0, 1, 3)$ in $\mathbb{R}^3$.

   (c) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ in M_2.

   (d) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ in M_2.

   (e) $\mathbf{v} = 1 + 4x - 3x^2$, $\mathbf{u} = 1 + x$, $\mathbf{w} = x - x^2$ nello spazio $\mathbf{P}_3$ dei polinomi di grado minore di 3.

   (f) $\mathbf{v} = 1 + x - 3x^2$, $\mathbf{u} = 1 + 2x$, $\mathbf{w} = x - x^2$ nello spazio $\mathbf{P}_3$ dei polinomi di grado minore di 3.

2. Determinare quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$ è costituito da vettori linearmente indipendenti

   $\{(0, 1, 2, 3), (1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5), (3, 4, 5, 6), (4, 5, 6, 7)\}$ □

   $\{(1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 1), (3, 4, 1, 2), (0, 1, 6, 3)\}$ □

   $\{(1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 1), (5, 7, 9, -1)\}$ □

   $\{(1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 1), (1, 1, 1, 1)\}$ □

   $\{(2, 4, 6, 8), (3, 6, 9, 12)\}$ □

3. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i vettori di $\mathbb{R}^3$ $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{v}_2 = (3, 2, k), \mathbf{v}_3 = (0, 1, k)$ risultano linearmente dipendenti?

4. Esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui i vettori di $\mathbb{R}^4$ $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 3), \mathbf{v}_2 = (3, 2, 0, k), \mathbf{v}_3 = (0, 1, 1, k)$ risultano linearmente dipendenti?

5. Mostrare che un insieme di vettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ in uno spazio vettoriale V è dipendente se e solo se uno dei $\mathbf{v}_i$ è combinazione lineare dei rimanenti vettori.

6. Sia V uno spazio vettoriale e $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un insieme di vettori di V. Mostare che

   (a) Se A è indipendente, ogni sottoinsieme $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$ è indipendente.

   (b) Se A è dipendente, ogni sovrainsieme B di A, $A \subseteq B$ è dipendente.

7. Siano $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 5y - z = 0\}$, e $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x - y + z = 0\}$. Allora:

   (a) trovare una base e la dimensione di S e T;

(b) trovare una base e la dimensione di $S \cap T$;

8. Stesso esercizio, considerando i due sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid y - z = 0, \quad x + 2z = 0\},$$
$$T = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2w = 0\}.$$

9. Stesso esercizio, considerando i due sottospazi di $M_{2\times 2}$

$$S = \{A \in M_{2\times 2} \mid A^T = A\},$$
$$T = \{\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid b, c, d \in \mathbb{R}; \; c - 2b + d = 0\}.$$

10. Trovare una base e la dimensione del sottospazio $S = \{p(x) \mid p(-1) = 0\}$ di $\mathbf{P}_3$.

11. Mostrare che, se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è una base per $\mathbb{R}^3$, allora ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ si scrive **in modo unico** come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

12. Trovare una base e la dimnesione del sottospazio annullatore della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

13. (a) Costruire una base di $\mathbb{R}^3$ formata da vettori per ciascuno dei quali la somma delle componenti sia 2.
    (b) È possibile trovare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da vettori per ciascuno dei quali la somma delle componenti sia 0? Motivare la risposta.

14. Trovare una base e la dimesione per i due sottospazi row(A) e col(A), dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

15. Può una matrice 3×4 avere righe indipendenti? Può avere colonne indipendenti? Motivare la risposta.

16. Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere, e quali false. (Fornire una dimostrazione se l'affermazione è vera, e un controesempio se falsa.) Sia A una matrice $m \times n$.
    (a) Se le righe di A sono linearmente indipendenti, allora row$(A) = \mathbb{R}^n$.
    (b) Se le colonne di A sono linearmente indipendenti, allora row$(A) = \mathbb{R}^n$.
    (c) Se le righe di A sono linearmente indipendenti, allora col$(A) = \mathbb{R}^m$.
    (d) Se le colonne di A sono linearmente indipendenti, allora col$(A) = \mathbb{R}^m$.
    (e) Se A ha una riga di zeri, allora il rango di A è minore di n.
    (f) Se A ha una colonna di zeri, allora il rango di A è minore di n.
    (g) Se $m \neq n$, la matrice ha sia le righe che le colonne indipendenti.