Prova di autovalutazione

Geometria e combinatoria

1. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema è compatibile?

$$\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x - 2y = -5 \\ 3x + 4y = k \end{cases}$$

Risultato: Per $k = -1$.

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, studiare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k & -1 \\ 2 & 3 & k-1 & 1 \\ -k & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Risultato: Per $k \neq 1$ il rango è 3; per $k = 1$ il rango è 2.

3. Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Risultato: $\det(A) = k^2 + k - 12$.

4. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice dell'esecizio 3 è invertibile? Se 0 è uno di questi valori, calcolare la matrice inversa per $k = 0$.

Risultato: Per $k \neq -4, 3$. Per $k = 0$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/12 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 2/3 & 1/12 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

5. Se $A \in M_3(\mathbb{R})$ è tale che $A^3 = 3I$, A è invertibile? Motivare la risposta.

Si ha $A \cdot A^2/3 = I$, quindi A è invertibile e $A^{-1} = A^2/3$.

6. Determinare la matrice inversa della matrice $\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$.

Risultato: L'inversa è la matrice $\begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$.

7. Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori di uno spazio vettoriale V tali che $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono linearmente dipendenti. Mostrare che $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ formano un insieme dipendente.

Soluzione: Siccome $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono dipendenti, esistono $a, b \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$ tali che $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = \mathbf{0}$; ma allora $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + 0\mathbf{w} = \mathbf{0}$ è una combinazione lineare nulla a coefficienti non tutti nulli, quindi i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti.

8. Per quali $k \in \mathbb{R}$ si ha che i vettori di $\mathbb{R}^4$ $\mathbf{v}_1 = (1, 1, k, -2), \mathbf{v}_2 = (1, k, 1, 1), \mathbf{v}_3 = (k, 1, 1, 1)$ sono indipendenti?

Risultato: Per $k \neq 1, -2$.

9. Determinare una base e la dimensione per il sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - 2w = 0, \text{ e } y - 3z = 0\}.$$

Determinare una base e la dimensione per il sottospazio $T = \{(x, y, z, w) \mid x + 3y - z = 0\}$ di $\mathbb{R}^4$. Determinare una base e la dimensione di $S \cap T$.

Risultato: Una base di S è $\mathcal{B}_S = \{(2/3, 0, 0, 1), (0, 3, 1, 0)\}$; la dimensione di S è due. Inoltre $\mathcal{B}_T = \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 3, 0), (0, 0, 0, 1)\}$, $\dim T$=3; $\mathcal{B}_{S\cap T} = \{(-8, 3, 1, -12)\}$, $\dim(S \cap T) = 1$.

10. Determinare una base e la dimensione dei sottospazi $S, T, S \cap T$ di $M_2(\mathbb{R})$, con $S = \{A | A = A^T\}$ e $T = \{A | A = -A^T\}$.

    Risultato: Una base di S è $\mathcal{B}_S = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$; la dimensione di S è tre. Inoltre $\mathcal{B}_T = \{(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\}$, dim$T$=1; $\mathcal{B}_{S \cap T} = \emptyset$, $\dim(S \cap T) = 0$.

11. Sia A un sottoinsieme di uno spazio vettoriale V, con $\mathbf{O}_V \in A$. Mostrare che l'insieme A è dipendente.
    Soluzione: Sia $A = \{\mathbf{0}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots\}$, e sia $0 \neq a \in \mathbb{R}$. Si ha che $a\mathbf{0} + 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + \ldots = \mathbf{0}$ è una combinazione lineare nulla a coefficienti non tutti nulli (perché il primo coefficiente, a, è non nullo). Quindi A è un insieme dipendente.

12. Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori di uno spazio vettoriale V. Mostrare che i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, 2\mathbf{u} - \mathbf{v} + 3\mathbf{w}$ sono dipendenti.

    Soluzione: la combinaozine lineare $-2\mathbf{u} + \mathbf{v} - 3\mathbf{w} + (2\mathbf{u} - \mathbf{v} + 3\mathbf{w}) = \mathbf{0}$ è una combinazione lineare nulla a coefficienti non tutti nulli, quindi i vettori sono linearmente dipendenti.

13. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Mostrare che $A + A^T$ è una matrice simmetrica, e che $A - A^T$ è una matrice antisimmetrica. Mostrare che ogni matrice si può scrivere come somma di una matrice simmetrica e una antisimmetrica.

    Soluzione: Si ha $(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T$ quindi $A + A^T$ è simmetrica. Si ha $(A - A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T)$ quindi $A - A^T$ è antisimmetrica. Ora la scrittura richiesta è $A = \frac{(A+A^T)}{2} + \frac{(A-A^T)}{2}$.

14. Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubiltà del sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2k \\ 3x - 4y + 2kz = -2 \\ -kx + 4kz = 0 \end{cases} .$$

    Risultato: Il sistema è compatibile e ammette soluzione unica per $k \neq 0, 1$; è compatibile con infinite soluzioni che dipandono da un parametro per $k = 0$; non è compatibile per $k = 1$.

15. Risolvere il sistema dell'esercizio precedente per $k = 0$.

    Risultato: Le soluzioni sono le terne della forma $(6t - 2, \frac{9t-2}{2}, t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.