Geometria e Combinatoria **soluzioni.**

Cognome e nome:
Numero di matricola:

- **NON potete utilizzare libri / appunti / calcolatrice**
- **scrivete SOLO le soluzioni, non il procedimento né i conti, e consegnate SOLO questo foglio**
- **nelle domande a risposta multipla ("con le crocette") la risposta giusta può essere una o più di una (potreste dover mettere più di una crocetta).**

---

1. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, se ne esistono, il sistema ammette infinite soluzioni che dipendono da due parametri?

$$\begin{cases} 2x + y + 3w = -2 \\ 4x - 2y + 2z - 4w = 6 \\ ky - z + 5w = -5 \end{cases} .$$

Sol. Per $k = 2$

Trovare le soluzioni del sistema per $k = 3$.

Sol. $\{(-3/2t - 1, 0, 5t + 5, t), t \in \mathbb{R}\}$

2. Trovare una base e la dimensione del sottospazio $S = \{(x, y, z, w) \,|\, 3x - y - z - w = 0,\ x - 4w = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$; trovare una base e la dimensione dei sottospazi $T = \{(x, y, z, w) \mid x - y + 2z = 0\}$ e $S \cap T$ di $\mathbb{R}^4$.

Sol. $\dim S = 2, \quad \mathcal{B}_S = \{(0, -1, 1, 0), (4, 11, 0, 1)\}$
$\dim T = 3, \quad \mathcal{B}_S = \{(1, 1, 0, 0), (-2, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$
$\dim(S \cap T) = 1, \quad \mathcal{B}_{S\cap T} = \{(4, 26/3, 7/3, 1)\}$

3. Per quali $k \in \mathbb{R}$ è invertibile la matrice A? Fissato un valore di k (specificare esplicitamente quale), determinare A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \\ 0 & k & -1 \end{pmatrix}.$$

Sol. A è invertible per $k \neq 2$. Scelto $k = 0$, si ha

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/8 & 1/4 \\ 1/2 & -1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Quante e quali soluzioni fra di loro non congrue modulo 35 ha la congruenza lineare

$$28x \equiv 21 \pmod{35}?$$

Sol. Sette soluzioni non congrue mod 35: sono 2,7,12,17,22,27,32

5. Un'applicazione $f : A \to B$ si dice SURIETTIVA se:

per ogni $a \in A$ esiste $f(a) \in B$; $\square$

per ogni $a, b \in A$ se $a \neq b$ allora $f(a) \neq f(b)$; $\square$

per ogni $b \in B$ esiste $a \in A$ tale che $f(a) = b$; $\boxtimes$

per ogni $a, b \in A$ se $a = b$ allora $f(a) = f(b)$. $\square$

6.Sia A una matrice $n \times n$ tale che le sue righe siano vettori indipendenti di $\mathbb{R}^n$. Quali affermazioni sono sicuramente vere?

A è invertibile $\boxtimes$

Il sistema $AX = B$ possiede infinite soluzioni $\square$

rg$A = n - 1$ $\square$

l'applicazione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(v) = Av$, è suriettiva $\boxtimes$

A ammette 0 come autovalore $\square$

le colonne di A sono indipendenti $\boxtimes$

7. Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, una base e la dimensione per il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f((x, y, z)) = (2x + y,\ 4x - 2y + 2z,\ ky - z)$. **Sol.**

Per $k \neq 2$ si ha $\dim Im(f) = 3$, $\mathcal{B}_{Im(f)} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, $\dim Ker(f) = 0$, $\mathcal{B}_{Ker(f)} = \emptyset$.

Per $k = 2$ si ha $\dim Im(f) = 2$, $\mathcal{B}_{Im(f)} = \{(2, 4, 0), (0, 2, -1)\}$, $\dim Ker(f) = 1$, $\mathcal{B}_{Ker(f)} = \{-1/2, 1, 2\}$.

8. Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; determinare gli autovalori e gli autospazi di A e stabilire se A è diagonalizzabile.

Sol.

Gli autovalori sono $3, 2, 2$. Si ha $V_3 = \{(3t, t, 2t) \quad t \in \mathbb{R}\}$, $V_2 = \{(t, s, s) \quad t, s \in \mathbb{R}\}$. Per l'autovalore 2 si ha $m_a(2) = 2 = m_g(2)$, e la matrice è quindi diagonalizzabile.

9. Quanti sottoinsiemi di 9 elementi ha un insieme di 13 elementi?

Sol. $\binom{13}{9} = \binom{13}{4} = 715$

10. Scrivere la tavola di verità della proposizione $((\neg p) \to (p \vee q)) \leftrightarrow (p \wedge (\neg q))$.
Sol.

p	q	$((\neg p) \to (p \vee q)) \leftrightarrow (p \wedge (\neg q))$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0