geometria e combinatoria

invertibili modulo n, gruppi

1. Determinare l'insieme degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{27}$, $\mathbb{Z}_{30}$ e $\mathbb{Z}_{48}$.

2. Determinare l'inverso di $\bar{7}$ in $\mathbb{Z}_{27}$, $\mathbb{Z}_{30}$ e $\mathbb{Z}_{48}$ usando l'identità di Bézout. Determinare l'inverso di $\bar{7}$ in $\mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}_{18}$ usando il teorema di Eulero ($a^{\varphi(n)} \equiv 1 \bmod n$).

3. Provare che, se x e y sono in $U(\mathbb{Z}_n)$, allora anche xy e x^{-1} sono in $U(\mathbb{Z}_n)$.

4. Calcolare l'ordine degli elementi di S_3 e di S_4.

5. Trovare tutti i sottogruppi del gruppo $(U(\mathbb{Z}_{50})\cdot)$, quelli del gruppo $(\mathbb{Z}_{20}, +)$ e quelli di $(S_4, \circ)$. (per S_4 l'esercizio è un po' lungo - se volete, trovate 5 sottogruppi di S_4).

6. Mostrare che se H e K sono due sottogruppi di G, anche $H \cap K$ è un sottogruppo di G. Cosa si può dire per $H \cup K$?

7. Considerare il gruppo $G = \mathbb{Q}^*(= \mathbb{Q} - \{0\})$, con l'operazione di moltiplicazione.

   (a) il sottoinsieme $S = \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{Z}^*\}$ è un suo sottogruppo?

   (b) il sottoinsieme $S = \{n,\ n \in \mathbb{Z}^*\}$ è un suo sottogruppo?