Geometria e Combinatoria
Esercitazione

1. L'applicazione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$f(x) = \frac{3x^3 - 2}{7}$$

   è iniettiva? È suriettiva? Se è possibile, calcolare f^{-1}.

   Sol: f è iniettiva: $f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{3x^3-2}{7} = \frac{3y^3-2}{7} \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$. f è suriettiva: ponendo $y = \frac{3y^3-2}{7}$ e risolvendo si ha $x = \sqrt[3]{\frac{7y+2}{3}}$. L'inversa è $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{7x+2}{3}}$

2. Siano $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $g(x) = 3x + 2$ e $h(x) = x - 7$ Calcolare $g \circ h$ e $(h \circ g)^{-1}$.

   Sol: $g \circ h = 3x - 19$; $(h \circ g)^{-1} = \frac{x+5}{3}$.

3. Siano, f, g, h le seguenti permutazioni di S_5; calcolare $f \circ g^{-1} \circ h^2$.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

   Sol:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Risolvere, se è possibile, la congruenza lineare $10x \equiv 6 \pmod{12}$. Quante e quali soluzioni fra di loro non congrue modulo 12 ha tale congruenza?

   Sol: La congruenza ha $2 = (12, 10)$ soluzioni, che sono $x_0 = 3 + 12k$ e $x_1 = 9 + 12k$.

5. Dimostrare che se p è un numero primo in $\mathbb{Z}$, allora $p|ab$ implica che $p|a$ o $p|b$.

   Sol: Mostriamo che se $p|ab$ ma $p \nmid a$, allora $p|b$. Se $p \nmid a$, allora si ha $(p, a) = 1$ siccome p è primo. Quindi esistono s,t tali che $1 = ps + at$. Ma allora $b = 1 \cdot b = (ps + at)b = psb + abt$, e quindi $p|b$.

6. Determinare l'insieme degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{16}$. Determinare, se se esiste, in $\mathbb{Z}_{16}$ l'inverso di $\overline{7}$.

   Sol: $U(\mathbb{Z}_{16}) = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{15}\}$; $\overline{7}^{-1} = \overline{7}$.

7. Risolvere, se è possibile, il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{7} \\ x \equiv 6 \pmod{8} \end{cases}$$

   Sol: $x = 46 + 56k$.

8. Calcolare $2^{72} \pmod 5$. (il risultato dev'essere un numero compreso fra 0 e 4).

   Sol: Per il piccolo teorema di Fermat si ha $2^4 \equiv 1 \pmod 5$, quindi $2^{72} = (2^4)^{18} \equiv 1^{18} = 1 \pmod 5$

9. Provare che, se x e y sono in $U(\mathbb{Z}_n)$, allora anche xy è in $U(\mathbb{Z}_n)$.

   Sol: Siccome x e y sono invertibili, esistono x^{-1} e y^{-1}. L'inverso dell'elemento xy è allora $y^{-1}x^{-1}$, visto che $xy\,y^{-1}x^{-1} = x(yy^{-1})x^{-1} = 1$; quindi xy è invertibile.

10. Scrivere la tavola di verità di $(p \to q) \leftrightarrow ((p \wedge (\neg q)) \to (\neg p))$.

    Sol: La proposizione è una tautologia (risulta sempre vera, per ogni valore di verità di p e q.

11. Siano $A = \{x \in \mathbb{Z} \quad | \quad 2 \leq x \leq 15\}$, $B = 3\mathbb{Z}$, $C = 4\mathbb{Z}$. Quanti elementi ha l'insieme delle parti dell'insieme

    $$A \setminus (B \cup C)?$$

    Sol: $2^7 = 128$.

12. Trovare, se è possibile, soluzioni intere per l'equazione

    $$12x + 20y = 8.$$

    Sol: Una soluzione è $(x, y) = (-1, 1)$.