geometria e combinatoria

calcolo proposizionale, relazioni

1. Siano, f, g, h le seguenti permutazioni di S_6; calcolare $f^{-1} \circ g^2 \circ h$.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$
$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Qual è il valore di verità delle sequenti proposizioni composte:

   (a) $q \wedge (s \to p)$;

   (b) $p \to ((s \wedge t) \leftrightarrow r)$;

   (c) $(p \wedge ((\neg q) \vee r)) \leftrightarrow (s \vee t))$

   con le assegnazioni p vero, q falso, r vero, s falso, t vero.

3. Costruire le tavole di verità per

   (a) $(p \wedge q) \to (\neg q)$;

   (b) $(\neg(p \leftrightarrow q)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q))$;

   (c) $(\neg q) \wedge (r \to (p \vee q))$;

   (d) $\neg((\neg p) \to (q \wedge r))$.

4. Verificare quali delle seguenti relazioni R (in cui A è l'insieme su cui sono definite, e x e y sono elementi di A) sono riflessive, quali simmetriche, quali transitive, quali di equivalenza o di ordine. Per le relazioni di equivalenza, descrivere l'insieme A/R delle classi di equivalenza.

   (a) $A = \{x \,|\, x$ è un essere umano$\}$, xRy se e solo se x e y sono nati nello stesso anno;

   (b) $A = \{x \,|\, x$ è un essere umano$\}$, xRy se e solo se x e y sono figli dello stesso padre;

   (c) $A = \{x \,|\, x$ è un essere umano$\}$, xRy se e solo se x e y hanno un genitore in comune;

   (d) A è l'insieme dei punti del piano della geometria euclidea, xRy se e solo se $\overline{xy} < 1$ (dove $\overline{xy}$ è la distanza tra x e y);

   (e) A è l'insieme delle rette nel piano, xRy se e solo se x e y sono parallele;

   (f) A è l'insieme delle rette nel piano, xRy se e solo se x e y non sono parallele;

(g) $A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, xRy se e solo se $x|y$ (cioè se esiste $z \in \mathbb{Z}$ tale che $xz = y$);

(h) $A = \mathcal{P}(B)$, B un insieme, xRy se e solo se $x \subseteq y$ (attenzione - in questo caso x e y sono insiemi);

(i) $A = \mathcal{P}(B)$, B un insieme, xRy se e solo se $|x| = |y|$ (attenzione - in questo caso x e y sono insiemi);

(j) $A = \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$, xRy se e solo se $x \cap y \neq \emptyset$ (attenzione - in questo caso x e y sono insiemi);

(k) $A = \mathbb{Z}$, xRy se e solo se x e y non hanno divisori in comune (ad esempio $10\, R\, 9$, mentre 12 non è in relazione con 15 perché 3 divide sia 12 che 15);

(l) $A = \mathbb{Z}$, xRy se e solo se $x + y$ è un multiplo di 4;

(m) $A = \mathbb{Z}$, xRy se e solo se $x - y$ è un multiplo di 4;

(n) A è l'insieme delle stringhe binarie di lunghezza n; xRy se x contiene lo stesso numero di 1 di y.

5. Sia $f : A \to B$ un'applicazione. Sia Re_f la relazione definita su A tale che $x\, Re_f\, y$ se e solo se $f(x) = f(y)$. Dimostrare che Re_f è una relazione di equivalenza, e Studiare l'insieme quoziente modulo Re_f per le seguenti applicazioni:

   (a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2$.

   (b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x)$ è il resto nella divisione di x per 4.