

Geometria e Combinatoria

Poset, reticoli, algebre di Boole

1. Sia $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Verificare che la relazione $\preccurlyeq$ definita su A come

$$(a, b) \preccurlyeq (c, d) \iff a \leq c \text{ e } b \leq d$$

è una relazione d'ordine. È un ordine totale?

2. (a) Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ con l'ordinamento naturale (cioè $x \preccurlyeq y \iff x \leq y$). Disegnare il diagramma di Hasse. È un reticolo? È un reticolo complementato?
- (b) Sia $D_{36} \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme dei divisori di 36, ordinato rispetto alla divisibilità. Disegnare il diagramma di Hasse del reticolo $(D_{36}, |)$. È un reticolo complementato?
- (c) Sia $D_{231} \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme dei divisori di 231, ordinato rispetto alla divisibilità. Disegnare il diagramma di Hasse del reticolo $(D_{231}, |)$. È un reticolo complementato? Trovare, se esiste, complemento di 11.
3. Quale dei poset dell'esercizio 2 è un'algebra di Boole?
4. Sia $(R, \wedge, \vee)$ un reticolo algebrico. Definiamo $x \preccurlyeq y$ se e solo se $x \wedge y = x$. Mostrare che $(R, \preccurlyeq)$ è un reticolo.