Geometria e Combinatoria

aritmetica modulo n, congruenze lineari

1. Sia n un intero positivo.
   (a) Calcolare $2n \pmod n$, $(5n+7) \pmod n$, $(3n-2) \pmod n$.
   (b) Calcolare $(n+2) \pmod{n+1}$, $(2n+2) \pmod{n+1}$, $n^2 \pmod{n+1}$, $(n^2+1) \pmod{n+1}$, $(n^2-1) \pmod{n+1}$.
   (c) Calcolare $(n+1)^2 \pmod n$, $(n^3+2n^2+4) \pmod n$, $n! \pmod n$.

2. Senza eseguire le moltiplicazioni per esteso, mostrare che si ha
   (a) $1234567 \times 90123 \equiv 1 \pmod{10}$;
   (b) $2468 \times 13579 \equiv -3 \pmod{25}$.

3. Dimostrare che la somma di tre interi consecutivi è zero modulo 3.

4. Quando è possibile, trovare tutte le soluzioni delle seguenti congruenze.
   (a) $7x \equiv 3 \pmod{10}$;
   (b) $5x \equiv 3 \pmod{10}$;
   (c) $3x \equiv 19 \pmod{29}$;
   (d) $6x \equiv 21 \pmod{15}$;
   (e) $-4x \equiv 6 \pmod{10}$;
   (f) $x \equiv 4^{2546} \pmod 5$.

5. Dimostrare che se n è un intero non primo ≥ 2, allora esiste un numero primo p tale che $p|n$ e $p^2 \leq n$.

6. Risolvere il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 4 \\ x \equiv 4 \pmod 7 \end{cases}.$$

7. Determinare l'insieme degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{27}$, $\mathbb{Z}_{30}$ e $\mathbb{Z}_{48}$.

8. Determinare l'inverso di $\overline{7}$ in $\mathbb{Z}_{27}$, $\mathbb{Z}_{30}$ e $\mathbb{Z}_{48}$ usando l'identità di Bézout.

9. Provare che, se x e y sono in $U(\mathbb{Z}_n)$, allora anche xy e x^{-1} sono in $U(\mathbb{Z}_n)$.