

Geometria e Combinatoria
Esercitazione

1. L'applicazione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$f(x) = \frac{3x^3 - 2}{7}$$

è iniettiva? È suriettiva? Se è possibile, calcolare f^{-1} .

2. Siano $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $g(x) = 3x + 2$ e $h(x) = x - 7$. Calcolare $g \circ h$ e $(h \circ g)^{-1}$.

3. Siano, f, g, h le seguenti permutazioni di S_5 ; calcolare $f \circ g^{-1} \circ h^2$.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Risolvere, se è possibile, la congruenza lineare $10x \equiv 6 \pmod{12}$. Quante e quali soluzioni fra di loro non congrue modulo 12 ha tale congruenza?

5. Dimostrare che se p è un numero primo in \mathbb{Z} , allora $p|ab$ implica che $p|a$ o $p|b$.

6. Determinare l'insieme degli elementi invertibili di \mathbb{Z}_{16} . Determinare, se esiste, in \mathbb{Z}_{16} l'inverso di $\bar{7}$.

7. Risolvere, se è possibile, il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{7} \\ x \equiv 6 \pmod{8} \end{cases}$$

8. Calcolare $2^{72} \pmod{5}$. (il risultato dev'essere un numero compreso fra 0 e 4).

9. Per quali valori del parametro a la seguente congruenza lineare ammette esattamente 4 soluzioni non congrue modulo 32?

$$ax \equiv 16 \pmod{32}$$

$$\begin{array}{llll} a = 20 & \square & a = 21 & \square & a = 22 & \square \\ a = 15 & \square & a = 16 & \square & a = 17 & \square \\ a = 34 & \square & a = 35 & \square & a = 36 & \square \end{array}$$

10. Provare che, se x e y sono in $U(\mathbb{Z}_n)$, allora anche xy è in $U(\mathbb{Z}_n)$.

11. Scrivere la tavola di verità di $(p \rightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge (\neg q)) \rightarrow (\neg p))$.

12. Siano $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 \leq x \leq 15\}$, $B = 3\mathbb{Z}$, $C = 4\mathbb{Z}$. Quanti elementi ha l'insieme delle parti dell'insieme

$$A \setminus (B \cup C)?$$

13. Quali fra le seguenti relazioni R sono relazioni di equivalenza sull'insieme A ?

A è l'insieme delle rette nel piano, xRy se e solo se x e y sono parallele;

A è l'insieme delle rette nel piano, xRy se e solo se x e y sono perpendicolari;

$A = \mathcal{P}(B)$, B un insieme, xRy se e solo se $x \subseteq y$;

$A = \mathcal{P}(B)$, B un insieme, xRy se e solo se $|x| = |y|$.

14. Trovare, se è possibile, soluzioni intere per l'equazione

$$32x + 20y = 8.$$