

## Geometria e Combinatoria

### Esercitazione

1. L'applicazione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che, per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , si ha

$$f(x) = \frac{3x^3 - 2}{7}$$

è iniettiva? È suriettiva? Se è possibile, calcolare  $f^{-1}$ .

**Sol:**  $f$  è iniettiva:  $f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{3x^3 - 2}{7} = \frac{3y^3 - 2}{7} \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$ .  $f$  è suriettiva: ponendo  $y = \frac{3y^3 - 2}{7}$  e risolvendo si ha  $x = \sqrt[3]{\frac{7y+2}{3}}$ . L'inversa è  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{7x+2}{3}}$

2. Siano  $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che, per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , si ha  $g(x) = 3x + 2$  e  $h(x) = x - 7$ . Calcolare  $g \circ h$  e  $(h \circ g)^{-1}$ .

**Sol:**  $g \circ h = 3x - 19$ ;  $(h \circ g)^{-1} = \frac{x+5}{3}$ .

3. Siano,  $f, g, h$  le seguenti permutazioni di  $S_5$ ; calcolare  $f \circ g^{-1} \circ h^2$ .

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Sol:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Risolvere, se è possibile, la congruenza lineare  $10x \equiv 6 \pmod{12}$ . Quante e quali soluzioni fra di loro non congrue modulo 12 ha tale congruenza?

**Sol:** La congruenza ha 2 = (12, 10) soluzioni, che sono  $x_0 = 3 + 12k$  e  $x_1 = 9 + 12k$ .

5. Dimostrare che se  $p$  è un numero primo in  $\mathbb{Z}$ , allora  $p|ab$  implica che  $p|a$  o  $p|b$ .

**Sol:** Mostriamo che se  $p|ab$  ma  $p \nmid a$ , allora  $p|b$ . Se  $p \nmid a$ , allora si ha  $(p, a) = 1$  siccome  $p$  è primo. Quindi esistono  $s, t$  tali che  $1 = ps + at$ . Ma allora  $b = 1 \cdot b = (ps + at)b = psb + abt$ , e quindi  $p|b$ .

6. Determinare l'insieme degli elementi invertibili di  $\mathbb{Z}_{16}$ . Determinare, se esiste, in  $\mathbb{Z}_{16}$  l'inverso di  $\bar{7}$ .

**Sol:**  $U(\mathbb{Z}_{16}) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{9}, \bar{11}, \bar{13}, \bar{15}\}$ ;  $\bar{7}^{-1} = \bar{7}$ .

7. Risolvere, se è possibile, il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{7} \\ x \equiv 6 \pmod{8} \end{cases}$$

**Sol:**  $x = 46 + 56k$ .

8. Calcolare  $2^{72} \pmod{5}$ . (il risultato dev'essere un numero compreso fra 0 e 4).

**Sol:** Per il teorema di Eulero-Fermat si ha  $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$ , quindi  $2^{72} = (2^4)^{18} \equiv 1^{18} = 1 \pmod{5}$

9. Per quali valori del parametro  $a$  la seguente congruenza lineare ammette esattamente 4 soluzioni non congrue modulo 32?

$$ax \equiv 16 \pmod{32}$$

$a = 20$	■	$a = 21$	□	$a = 22$	□
$a = 15$	□	$a = 16$	□	$a = 17$	□
$a = 34$	□	$a = 35$	□	$a = 36$	■

10. Provare che, se  $x$  e  $y$  sono in  $U(\mathbb{Z}_n)$ , allora anche  $xy$  è in  $U(\mathbb{Z}_n)$ .

**Sol:** Siccome  $x$  e  $y$  sono invertibili, esistono  $x^{-1}$  e  $y^{-1}$ . L'inverso dell'elemento  $xy$  è allora  $y^{-1}x^{-1}$ , visto che  $xyy^{-1}x^{-1} = x(yy^{-1})x^{-1} = 1$ ; quindi  $xy$  è invertibile.

11. Scrivere la tavola di verità di  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge (\neg q)) \rightarrow (\neg p))$ .

**Sol:** La proposizione è una tautologia (risulta sempre vera, per ogni valore di verità di  $p$  e  $q$ ).

12. Siano  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 \leq x \leq 15\}$ ,  $B = 3\mathbb{Z}$ ,  $C = 4\mathbb{Z}$ . Quanti elementi ha l'insieme delle parti dell'insieme

$$A \setminus (B \cup C)?$$

**Sol:**  $2^7 = 128$ .

13. Quali fra le seguenti relazioni  $R$  sono relazioni di equivalenza sull'insieme  $A$ ?

$A$  è l'insieme delle rette nel piano,  $xRy$  se e solo se  $x$  e  $y$  sono parallele; ■

$A$  è l'insieme delle rette nel piano,  $xRy$  se e solo se  $x$  e  $y$  sono perpendicolari; □

$A = \mathcal{P}(B)$ ,  $B$  un insieme,  $xRy$  se e solo se  $x \subseteq y$ ; □

$A = \mathcal{P}(B)$ ,  $B$  un insieme,  $xRy$  se e solo se  $|x| = |y|$ . ■

14. Trovare, se è possibile, soluzioni intere per l'equazione

$$32x + 20y = 8.$$

**Sol:** Una soluzione è  $(x, y) = (4, -6)$ .