

Geometria e Combinatoria

divisibilità, massimo comun divisore

1. Dimostrare le seguenti proprietà della divisibilità fra numeri interi.

- (a) $a|b \Rightarrow a|bc \quad \forall c.$
- (b) $c|a \text{ e } c|b \Rightarrow c|as + tb \quad \forall s, t.$
- (c) $\forall c \neq 0, a|b \iff ca|cb.$
- (d) $(a, b) = 1 \text{ e } (a, c) = 1 \Rightarrow (a, bc) = 1.$
- (e) $a|bc \text{ e } (a, c) = 1 \Rightarrow a|b.$

2. Usando l'algoritmo euclideo, calcolare il massimo comun divisore d fra gli interi a e b ; trovare poi due interi s e t tali che si abbia $d = as + bt$.

- (a) $a=62, b=44.$
- (b) $a=448, b=721.$
- (c) $a=2406, b=654.$

3. Trovare, se è possibile, soluzioni intere per le seguenti equazioni:

- (a) $11x + 4y = 1.$
- (b) $11x + 4y = 7.$
- (c) $4x + 14y = 6.$
- (d) $21x + 33y = 9.$
- (e) $215x + 175y = 90.$

4. Per quali valori del parametro k la seguente equazione ammette soluzioni intere?

$$30x + ky = 35$$

$k = 25$	<input type="checkbox"/>	$k = 26$	<input type="checkbox"/>	$k = 27$	<input type="checkbox"/>
$k = 30$	<input type="checkbox"/>	$k = 33$	<input type="checkbox"/>	$k = 35$	<input type="checkbox"/>
$k = 45$	<input type="checkbox"/>	$k = 46$	<input type="checkbox"/>	$k = 47$	<input type="checkbox"/>

5. Date due bottiglie, una da 5 e una da 3 litri, e una fonte d'acqua, trovare una procedura (riempiendo, vuotando, travasando) che consenta di misurare esattamente 4 litri d'acqua. Se le bottiglie sono invece da 3 e 6 litri, si può trovare una procedura che produce 4 litri?

6. Dimostrare che se p è un numero primo in \mathbb{Z} , allora $p|ab$ implica che $p|a$ o $p|b$.

7. Dimostrare che se n è un intero non primo ≥ 2 , allora esiste un numero primo p tale che $p|n$ e $p^2 \leq n$.