geometria e combinatoria

relazioni

1. Siano, f, g, h le seguenti permutazioni di S_6.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcolare $f^{-1}, g^{-1}, h^{-1}, \quad f^2, f^3, f^4, \quad f \circ g, h^{-1} \circ f, \quad f^{-1} \circ g^2 \circ h$.

2. Verificare quali delle seguenti relazioni R (in cui A è l'insieme su cui sono definite, e x e y sono elementi di A) sono riflessive, quali simmetriche, quali transitive, quali di equivalenza o di ordine. Per le relazioni di equivalenza, capire come è fatto l'insieme A/R delle classi di equivalenza.

   (a) $A = \{x \mid x \text{ è un essere umano}\}$, xRy se e solo se x e y sono nati nello stesso anno;

   (b) $A = \{x \mid x \text{ è un essere umano}\}$, xRy se e solo se x e y sono figli dello stesso padre;

   (c) $A = \{x \mid x \text{ è un essere umano}\}$, xRy se e solo se x e y hanno un genitore in comune;

   (d) A è l'insieme dei punti del piano della geometria euclidea, xRy se e solo se $\overline{xy} < 1$ (dove $\overline{xy}$ è la distanza tra x e y);

   (e) A è l'insieme delle rette nel piano, xRy se e solo se x e y sono parallele;

   (f) A è l'insieme delle rette nel piano, xRy se e solo se x e y non sono parallele;

   (g) $A = \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$, xRy se e solo se $x \cap y \neq \emptyset$ (attenzione - in questo caso x e y sono insiemi);

   (h) $A = \mathcal{P}(B)$, B un insieme, xRy se e solo se $x \cap y = \emptyset$

   (i) $A = \mathcal{P}(B)$, B un insieme, xRy se e solo se $x \subseteq y$

   (j) $A = \mathcal{P}(B)$, B un insieme, xRy se e solo se $|x| = |y|$

   (k) $A = \mathbb{Z}$, xRy se e solo se $\mathrm{MCD}(x, y) = 1$;

   (l) $A = \mathbb{Z}$, xRy se e solo se $x + y$ è un multiplo di 4;

   (m) $A = \mathbb{Z}$, xRy se e solo se $x - y$ è un multiplo di 4;

   (n) A è l'insieme delle stringhe binarie di lunghezza n; xRy se x contiene lo stesso numero di 1 di y.

3. Sia $f : A \to B$ un'applicazione. Sia Re_f la relazione definita su A tale che $x\, Re_f\, y$ se e solo se $f(x) = f(y)$. Dimostrare che Re_f è una relazione di equivalenza. Studiare l'insieme quoziente modulo Re_f per le seguenti applicazioni:

   (a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2$.

   (b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x)$ è il resto nella divisione di x per 4.