

## Esercizi di Geometria

### Applicazioni lineari

- Determinare, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , una base e la dimensione per il nucleo e l'immagine delle seguenti trasformazioni lineari.
  - $f_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f_a((x, y, z)) = (-x + y + kz, 3x + 3y + 2z, 4x + 2y + kz)$ .
  - $f_b : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f_b((x, y, z)) = (x + 3y + -2z, -2x + ky + 3z)$ .
  - $f_c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f_c((x, y)) = (x + 2y, ky, 3x + (6 + k)y)$ .
- Determinare l'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che  $f((1, 1)) = (4, 2)$  e  $f((1, 0)) = (-2, -1)$ . Trovare una base per il nucleo di questa applicazione.
- Mostrare che un'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  non può essere iniettiva, e che un'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  non può essere suriettiva.
- Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare; è vero che se i vettori  $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k)$  sono linearmente indipendenti in  $W$ , allora i vettori  $v_1, v_2, \dots, v_k$  sono linearmente indipendenti in  $V$ ?
- Sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare; è vero che se i vettori  $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k)$  sono linearmente dipendenti in  $W$ , allora i vettori  $v_1, v_2, \dots, v_k$  sono linearmente dipendenti in  $V$ ?
- Trovare per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  risulta iniettiva l'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che  $f((1, -1)) = (k, -1)$  e  $f((0, 1)) = (-2, 3)$ .
- In  $\mathbb{R}^2$  si consideri il sottospazio  $S = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ . Determinare un'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che  $\ker f = S$ .
- Sia  $A$  una matrice non invertibile  $n \times n$ . Quali affermazioni sono sicuramente vere?

le righe di $A$ sono dipendenti	<input type="checkbox"/>	Il sistema $AX = B$ possiede infinite soluzioni	<input type="checkbox"/>
$\operatorname{rg} A = n - 1$	<input type="checkbox"/>	l'applicazione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , $f(v) = Av$ , non è suriettiva	<input type="checkbox"/>
Il sistema $AX = 0$ possiede infinite soluzioni	<input type="checkbox"/>	le colonne di $A$ sono indipendenti	<input type="checkbox"/>