Esercizi di Geometria
Base e dimensione

1. Siano $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 5y - z = 0\}$, e $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x - y + z = 0\}$. Allora:
   (a) trovare una base e la dimensione di S e T;
   (b) trovare una base e la dimensione di $S \cap T$;
   (c) completare la base di S a una base di $\mathbb{R}^3$.

2. Stesso esercizio, considerando i due sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid y - z = 0, \quad x + 2z = 0\},$$

$$T = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2w = 0\}.$$

3. Stesso esercizio, considerando i due sottospazi di $M_{2\times 2}$

$$S = \{A \in M_{2\times 2} \mid A^T = A\},$$

$$T = \{\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid b, c, d \in \mathbb{R};\ \ c - 2b + d = 0\}.$$

4. Trovare una base e la dimensione del sottospazio $S = \{p(x) \mid p(2) = 0\}$ di $\mathbb{R}_3[x]$.

5. Mostrare che, se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è una base per $\mathbb{R}^3$, allora ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ si scrive **in modo unico** come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

6. Trovare una base e la dimnesione del sottospazio annullatore della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

7. (a) Costruire una base di $\mathbb{R}^3$ formata da vettori per ciascuno dei quali la somma delle componenti sia 2.
   (b) È possibile trovare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da vettori per ciascuno dei quali la somma delle componenti sia 0? Motivare la risposta.

8. Trovare una base e la dimesione per i due sottospazi row(A) e col(A), dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Può una matrice 3×4 avere righe indipendenti? Può avere colonne indipendenti? Motivare la risposta.

10. Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere, e quali false. (Fornire una dimostrazione se l'affermazione è vera, e un controesempio se falsa.) Sia A una matrice $m \times n$.

   (a) Se le righe di A sono linearmente indipendenti, allora $\text{row}(A) = \mathbb{R}^n$.

   (b) Se A ha una riga di zeri, allora il rango di A è minore di n.

   (c) Se A ha una colonna di zeri, allora il rango di A è minore di n.

   (d) Se $m \neq n$, la matrice ha sia le righe che le colonne indipendenti.