

1. Trovare una base e la dimensione dei sottospazi $S = \{(x, y, z, w) \mid 2x - 3y + z = 0\}$, $T = \{(x, y, z, w) \mid x - y + 3w = 0, z - 3x = 0\}$ e $S \cap T$ di $\mathbb{R}^4$.

2. Scrivere la matrice A_f associata, rispetto alla base canonica, all'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f((1, -2)) = (2, 3)$ e $f((0, 1)) = (-2, 4)$.

3. Fra le seguenti applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, quali sono iniettive?

$$f(x, y, z) = (x, y, x + y, z) \quad \square \quad f(x, y, z) = (x - y, z, 2x - 2y, 0) \quad \square$$

$$f(x, y, z) = (x, x, y, y) \quad \square \quad f(x, y, z) = (x, y, z, x + y + z) \quad \square$$

4. Sia A una matrice $n \times n$, e sia $\det A = -1$. Quali affermazioni sono sicuramente vere?

$$A \text{ è invertibile} \quad \square \quad \text{l'applicazione } f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, f(v) = Av, \text{ è suriettiva} \quad \square$$

$$\operatorname{rg} A = n \quad \square \quad \text{il sistema } AX = B \text{ è sempre incompatibile} \quad \square$$

$$\det(-A) = 1 \quad \square \quad \text{le colonne di } A \text{ sono dipendenti} \quad \square$$

5. Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, una base e la dimensione per il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f((x, y, z)) = (2x + y + kz, 2x + 3y + kz, 5x - 2y + z)$.

6. Se i tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ di uno spazio vettoriale V sono linearmente indipendenti, i tre vettori $\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{w} - \mathbf{u}$ di V sono ancora indipendenti? Motivare la risposta.

7. Mostrare che, se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è una base per $\mathbb{R}^3$, allora ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ si scrive in modo unico come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

8. Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere, e quali false. Siano A, B due matrici quadrate dello stesso ordine.

a. Se A è una matrice tale che $A^2 = I$, allora $\det(A) = \pm 1$.

b. Se $\det(AB) = 0$, allora $\det(A) = 0$ oppure $\det(B) = 0$.

c. $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

d. $\det(-A) = -\det(A)$.

e. Se la diagonale principale di A consiste di soli zeri, allora $\det(A) = 0$.

f. Se A è invertibile, allora $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

g. $\det(AB) = \det(BA)$